

Shir-Kuan Lin

*Aufbau von Modellen zur Lageregelung von  
Industrierobotern*





Shir-Kuan Lin

*Aufbau von Modellen zur Lageregelung von  
Industrierobotern*

Herausgegeben von  
Professor Dr.-Ing. Klaus Feldmann,  
Lehrstuhl für  
Fertigungsautomatisierung und Produktionssystematik  
**FAPS**



Carl Hanser Verlag München Wien

Als Dissertation genehmigt von der Technischen Fakultät der  
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung:	18. Juli 1988
Tag der Promotion:	11. November 1988
Dekan:	Prof. Dr.rer.nat. F. Hofmann
Berichterstatte	Prof. Dr.-Ing. K. Feldmann
	Prof. Dr.-Ing. G. Duellen

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Lin, Shir-Kuan:

Aufbau von Modellen zur Lageregelung von Industrierobotern/  
Shir-Kuan Lin. Hrsg. von Klaus Feldmann. - München ; Wien :  
Hanser, 1989.

(Fertigungstechnik Erlangen)

Zugl.: Erlangen, Nürnberg, Univ., Diss., 1988

ISBN 3-446-15546-5

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdrucks und  
der Vervielfältigung des Buches oder Teilen daraus,  
vorbehalten.

Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des  
Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein  
anderes Verfahren), auch nicht für Zwecke der Unterrichts-  
gestaltung - mit Ausnahme der in den §§ 53, 54 URG ausdrück-  
lich genannten Sonderfällen -, reproduziert oder unter  
Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, Vervielfäl-  
tigt oder verbreitet werden.

© Carl Hanser Verlag München, Wien 1989

Herstellung: Druckerei Bresler, Erlangen

Printed in Germany

Gedruckt mit Unterstützung des Deutschen Akademischen  
Austauschdienstes

## VORWORT

Die vorliegende Arbeit wurde am Lehrstuhl für Fertigungsautomatisierung und Produktionssystematik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg angefertigt.

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst (DAAD) danke ich für das Stipendium zur Promotion.

Herrn Professor Dr.-Ing. K. Feldmann, dem Leiter des Lehrstuhls für Fertigungsautomatisierung und Produktionssystematik am Institut für Fertigungstechnik, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und die wohlwollende Unterstützung.

Herrn Professor Dr.-Ing. G. Duellen am Institut für Werkzeugmaschinen und Fertigungstechnik der Technischen Universität Berlin danke ich für die Übernahme des Korreferates und seine wertvollen Vorschläge.

Besonderer Dank gebührt auch Herrn Dr.-Ing. D. Classe, der mir in den vergangenen Jahren mit vielfältigen Hinweisen bei der Durchführung der Arbeiten geholfen hat. Ferner gilt mein Dank allen Kollegen am Lehrstuhl für ihre Hilfsbereitschaft und nicht zuletzt Fräulein G. Lechner für die Durchsicht des ganzen Manuskriptes.

Shir-Kuan Lin

---

## Aufbau von Modellen

### zur Lageregelung von Industrierobotern

---

#### - INHALTSVERZEICHNIS -

	Seite
0 FORMELZEICHEN UND ABKÜRZUNGEN	1
1 EINLEITUNG	5
2 KÖRPERFESTE KOORDINATENSYSTEME	10
2.1 Konventionelle körperfeste Koordinatensysteme	10
2.1.1 Denavit-Hartenberg-Notation .....	11
2.1.2 Hauptachsen-Koordinatensystem .....	14
2.2 Eingangachsen-Koordinatensystem .....	16
2.2.1 Allgemeine Theorie .....	16
2.2.2 Normales Eingangachsen-Koordinatensystem .....	22
2.2.3 Einfaches Eingangachsen-Koordinatensystem .....	28
2.3 Vorteile des normalen Eingangachsen-Koordinatensystems im Vergleich zu anderen Systemen ..	30
2.4 Roboter mit geschlossenen Ketten .....	31
3 KINEMATISCHE GLEICHUNGEN	37
3.1 Vorwärtskinematik .....	37
3.2 Rückwärtskinematik .....	40
3.3 Eigenschaften der kinematischen Singularität..	45

<b>4</b>	<b>DYNAMISCHE MODELLE VON INDUSTRIEROBOTERN MIT EINER EINFACHEN OFFENEN KETTE</b>	<b>57</b>
4.1	Rekursive Newton-Eulersche Formulierung zum dynamischen inversen System .....	58
4.2	Anzahl der arithmetischen Operationen der Algorithmen .....	59
4.3	Implementierung des dynamischen inversen Systems an einem Mikroprozessor .....	71
4.3.1	Struktur der Software zur Implementierung des dynamischen inversen Systems..	71
4.3.2	Ergebnisse des Experiments .....	75
<b>5</b>	<b>KARTESISCHE LAGEREGELUNG</b>	<b>79</b>
5.1	Problemstellung .....	79
5.2	Eulersche Parameter .....	82
5.3	Kartesische Lageregelung durch Rückführungs- entkopplung .....	83
5.3.1	Allgemeine Theorie .....	84
5.3.2	Kartesische Lageregelung mit den Euler- schen Parametern als Orientierungsab- weichung .....	88
5.3.3	Algorithmus .....	92
5.4	Konvergenzanalyse .....	94
5.5	Simulation .....	99
5.6	Lageregelung bei begrenzten Antriebskräften ..	108
5.7	Schlußbemerkungen .....	113
<b>6</b>	<b>INDUSTRIEROBOTER MIT GESCHLOSSENEN KETTEN</b>	<b>117</b>
6.1	Vorteile und Schwierigkeiten .....	117
6.2	Dynamisches Modell .....	118
6.2.1	Kräfte und Momente an den Gelenken einer geschlossenen Kette .....	118
6.2.2	Bewegungsgleichungen einer geschlosse- nen Kette .....	123
6.3	Semi-Direct-Drive-Roboter als ein Beispiel für Roboter mit einer geschlossenen Kette .....	127
6.4	Modelle der Lageregelung .....	135
6.4.1	Gelenk-Lageregelung .....	135

6.4.2	Kartesische Lageregelung .....	138
6.5	Schlußbemerkungen .....	141
7	ZUSAMMENFASSUNG .....	142
8	LITERATURVERZEICHNIS .....	144
ANHANG: ALGEBRA DER EULERSCHEN PARAMETER .....		156
A.1	Quaternionen .....	156
A.2	Eulersche Parameter .....	159
A.3	Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung .....	162
A.4	Anwendung auf Roboter .....	164

## 0 FORMELZEICHEN UND ABKÜRZUNGEN

### Oberzeichen

$\vec{\phantom{x}}$	Vektor
$\wedge$	Quaternion

### Unterzeichen

$\_$	Darstellung eines Vektors bei einem kleinen Buchstaben od. Matrix bei einem großen Buchstaben
$\sim$	Darstellung einer Quaternion

### Rechtsoberzeichen

c	geschlossene Kette
$\langle i \rangle$	die auf die Koordinatenbasis $[\vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i]$ bezogene Darstellung
$\langle o \rangle$	die auf die Gestellkoordinatenbasis $E_o$ bezogene Darstellung
o	offene Kette
z	System der Zwangskräfte
T	Transponierung
-1	Inversion
*	Konjugation einer Quaternion

### Rechtsunterzeichen

A	aktives Gelenk
c	Istwert
d	Sollwert
E	Endeffektor
G	gleichwertiger Roboter mit einer einfachen offenen Kette
o	Gestell
P	passives Gelenk
r	Nullkonfiguration

### Symbole und Abkürzungen

$\underline{a}$	dritte Spalte von $\overset{E}{O}H$
A	Addition/Subtraktion

$b_i$	kinematischer Parameter der Koordinatentransformation (s. Bilder 2-1 und 2-5)
$\underline{b}_i$	Abstand vom Ursprung der Gestellkoordinatenbasis $E_0$ zu einem festen Punkt im i-ten Glied
$C_{i+j}$	$\cos(\theta_i \pm \theta_j)$
$d_i$	kinematischer Parameter der Koordinatentransformation (s. Bilder 2-1 und 2-5)
$\det[\cdot]$	Determinante
$D$	Division
$\underline{e}$	$= [e_0 \ e_1 \ e_2 \ e_3]^T$ Eulersche Parameter
$\underline{d}_{oe}$	Eulersche Parameter, die die Drehung von der Orientierung der Gestellkoordinatenbasis $E_0$ zur Sollorientierung des Endeffektors darstellen
$\underline{c}_{oe}$	Eulersche Parameter, die die Drehung von der Orientierung der Gestellkoordinatenbasis $E_0$ zur Istorientierung des Endeffektors darstellen
$\underline{d}_{ce}$	Eulersche Parameter, die die Drehung von der Ist- zur Sollorientierung des Endeffektors darstellen
$E_i$	i-te körperfeste Koordinatenbasis $\{O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i\}$
$E_0$	Gestellkoordinatenbasis
$\underline{f}(\dot{q}, q)$	Spalte, die die Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräfte enthält
$\underline{h}$	$= [\underline{n}^T \ \underline{s}^T \ \underline{a}^T \ \underline{f}^T]^T$
$\underline{h}_i$	Abstand vom Ursprung von $E_{i-1}$ zu dem von $E_i$
$\underline{E}_{oh}$	Abstand vom Ursprung der Gestellkoordinatenbasis $E_0$ zum Endeffektor
$\underline{j}_{iH}$	Homogentransformationsmatrix von der i-ten zur j-ten körperfesten Koordinatenbasis
$\underline{E}_{oH}$	Homogentransformationsmatrix von der Gestellkoordinatenbasis $E_0$ zur am Endeffektor festgelegten Koordinatenbasis $E_E$
$\underline{H}_R$	Homogentransformationsmatrix einer Rotation
$\underline{H}_T$	Homogentransformationsmatrix einer Translation
$\underline{I}$	Einheitsmatrix
$\underline{J}$	Jacobimatrix
$\underline{J}_i$	Trägheitstensor des i-ten Gliedes



$K_i$	Index des Types des i-ten Gelenks: 0 für Drehgelenk, 1 für Subgelenk
$\ell_{ij}$	kinematischer Parameter der Koordinatentransformation (s. Bild 2-5)
$m_i$	Masse des i-ten Gelenks
$m_{ij}$	(i, j)-tes Element von $\underline{M}(q)$
$M$	Multiplikation
$\underline{M}(q)$	Massenmatrix
$\underline{n}$	erste Spalte von $\underline{E}_{OH}$
$p_i$	Abstand vom Ursprung der Gestellkoordinatenbasis $E_O$ zu dem von $E_i$
$\underline{P}(e)$	Matrix, die der Quaternionenmultiplikation entspricht
$\underline{P}_e$	definiert in der Gl.(5.24)
$q_i$	i-te Gelenkverrückung
$\underline{q}$	$= [q_1 \dots q_n]^T$
$\ddot{\underline{q}}^*$	geregelter Sollgelenkbeschleunigungen
$Q$	Quadratwurzel
$\underline{r}$	vierte Spalte von $\underline{E}_{OH}$
$R$	Drehgelenk
$\underline{j}_i \underline{R}$	3x3 Transformationsmatrix von der i-ten zur j-ten körperfesten Koordinatenbasis
$\text{Rot}(\underline{u}, \theta)$	Rotationsmatrix von $\theta$ um die Drehachse $\underline{u}$
$\underline{s}$	zweite Spalte von $\underline{E}_{OH}$
$\sin(\theta_i \pm \theta_j)$	
$s/c$	ein Paar von Sinus und Cosinus
$T$	Schubgelenk
$\underline{u}_i$	Einheitsvektor des i-ten Gelenks
$\underline{v}(t)$	PID-Regler, definiert in der Gl.(5.28)
$\underline{v}_E$	Geschwindigkeit des Endeffektors
$\underline{v}_{Ei}$	partielle Ableitung von $\underline{v}_E$ bei $\dot{q}_i$
$\underline{0}$	Nullspalte
$\underline{0}$	Nullmatrix
$\alpha$	Winkelbeschleunigung des Endeffektors in Kapitel 5
$\alpha_i$	Winkelbeschleunigung des i-ten Gliedes
$\beta_i$	kinematischer Parameter der Koordinatentransformation (s. Bilder 2-1 und 2-5)

$\delta_{ij}$	kinematischer Parameter der Koordinatentransformation (s. Bild 2-5)
$\underline{\epsilon}$	Lageabweichung des Endeffektors
$\underline{\epsilon}_e$	Orientierungsabweichung des Endeffektors
$\underline{\epsilon}_r$	Positionsabweichung des Endeffektors
$\theta_i$	kinematischer Parameter der Koordinatentransformation (s. Bilder 2-1 und 2-5)
$\xi$	definiert in der Gl.(5.9)
$\xi_e$	definiert in der Gl.(5.23)
$\tau_i$	Antriebskraft des i-ten Gelenks
$\underline{\tau}$	$= [\tau_1 \dots \tau_n]^T$
$\underline{\omega}$	Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors in Kapitel 5
$\underline{\omega}_E$	Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors
$\underline{\omega}_{Ei}$	partielle Ableitung von $\underline{\omega}_E$ bei $\dot{q}_i$
$\omega_i$	Winkelgeschwindigkeit des i-ten Gliedes
$\Delta$	Definition
$\odot$	Quaternionenmultiplikation

$$\left[ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{n}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial n_x} & \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial n_y} & \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial n_z} \end{bmatrix}$$

$$\left[ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{n}} & \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{s}} & \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{a}} & \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{r}} \end{bmatrix}$$

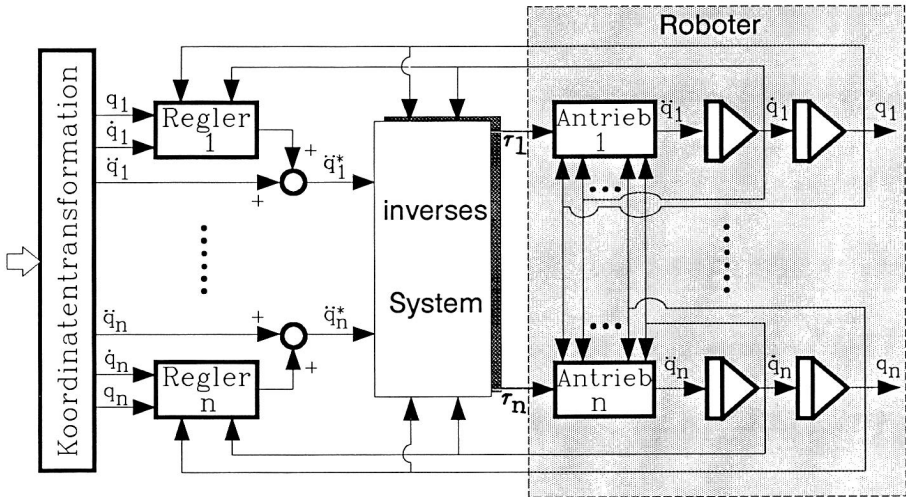
## 1 EINLEITUNG

Die zukünftige Fabrik erfordert eine hohe Flexibilität der Produktionssysteme. Das Konzept einer rechnerintegrierten Fabrik ergibt sich aus dieser Anforderung [13]. Industrieroboter sind ein wichtiger Bestandteil der Fertigungseinrichtungen zur Automatisierung der Produktion. Deren Rolle in der rechnerintegrierten Fabrik gewinnt immer mehr an Bedeutung. Deshalb bemühen sich zunehmend mehr Wissenschaftler um die leistungsfähige Steuerung von Robotern.

Das erste Ziel der Steuerung von Robotern ist es, die Bewegungsabläufe von Robotern gemäß einem vorgegebenen Programm zu gewährleisten. Dazu dient die Lageregelung. Eine der besten Methoden zur Lageregelung von Robotern ist die Rückführungsentkopplung (Feedback-Entkopplung) durch das inverse System [33]. Das Robotersystem ist wegen der kinematischen Nichtlinearität und der dynamischen Kopplung ein verkoppeltes nichtlineares Mehrgrößensystem. Durch das inverse System wird das Robotersystem entkoppelt und linearisiert, so daß jedes Gelenk ausschließlich von einem zugehörigen Eingang angesteuert wird und an jeden Eingang ein einzelner Regler eingesetzt werden kann (s. Bild 1-1).

Ausgehend von diesem Konzept sind verschiedene Regler [6, 16, 17, 22, 34, 41, 44, 49, 50, 64] entworfen worden. Weiterhin kann diese Methode auch diejenigen neueren Lageregelungen umfassen [64], die aus der Methode der Gleitmode [57, 58], der Lyapunovschen Methode [63] und der Optimal-Entscheidungsstrategie [62] entstanden sind.

Den Vorteilen der Rückführungsentkopplung steht ein hoher Rechenaufwand und eine relativ große Parameterempfindlichkeit gegenüber [33]. Der hohe Rechenaufwand verursacht die Schwierigkeit bei der Anwendung des inversen Systems. Zur Implementierung der Lageregelung von Robotern an einem Mikroprozessor gibt es zwei Kriterien für die Abtastzeit:



Roboter:  $\ddot{\mathbf{q}} = [\mathbf{M}(\mathbf{q})]^{-1} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}))$

inverses System:  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}^*(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{f}^*(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$

Gesamtsystem:  $\ddot{\mathbf{q}} \approx \ddot{\mathbf{q}}^*$ , wenn  $\mathbf{M}^*(\mathbf{q}) \approx \mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{f}^*(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \approx \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ .

Bild 1-1. Gelenk-Lageregelung mit der Rückführungsentkopplung durch das inverse System.

- mechanisches Kriterium [42]: Da die Eigenfrequenzen der meisten heutigen Manipulatoren um 10 Hz liegen, sollte die Abtastfrequenz die Eigenfrequenz sechsmal überschreiten, damit die Konvergenz des geregelten Systems gesichert bleibt. D.h., die Abtastzeit sollte unter 17ms liegen.
- Bahngeschwindigkeitskriterium [37]: Damit die Genauigkeit des Roboters bei der höchsten Geschwindigkeit  $V(\text{mm/s})$  noch um  $P(\text{mm})$  bleibt, sollte die Abtastzeit nicht größer als  $P/V(\text{s})$  sein.

Das erste Kriterium muß unbedingt erfüllt werden, während das zweite nur für Roboter mit hoher Geschwindigkeit gilt.

Zur Reduzierung des Rechenaufwandes hat man vor allem ein vereinfachtes inverses System (d.h. genäherte dynamische Gleichungen) verwendet, wie z.B.[50]. Wegen der großen Parameterempfindlichkeit der Entkopplungsstrategie verursacht ein genähertes inverses System eine unvernachlässigbare Bahnabweichung. Die Studien zur Robustheit [11, 17, 44, 64] empfehlen, ein möglichst genaues inverses System einzusetzen.

Weil die realisierte Implementierung der vorhandenen Algorithmen zum inversen System für sechssachsig Roboter an einem üblichen Mikroprozessor (INTEL 8086/8087 mit 5MHz Takt) noch eine Rechenzeit über 30ms braucht [69], besteht eine wichtige wissenschaftliche Aufgabe darin, einen Algorithmus zu entwickeln, der wenig Rechenaufwand erfordert.

Zu diesem Zweck wird in dieser Arbeit zuerst das Eingangsachsen-Koordinatensystem eingeführt, das sich in der Kinematik und der Dynamik des Mehrkörpersystems als vorteilhaft erwiesen hat. Um den Rechenaufwand zu reduzieren, wird die rekursive Newton-Eulersche Formulierung des inversen Systems von Robotern [42] dann durch die Verwendung dieses Koordinatensystems erneut hergeleitet. Deren Implementierung an einem üblichen Mikroprozessor (INTEL 8086/8087) wird unter dem mechanischen Abtastzeitkriterium realisiert.

Die Regelung durch die Rückführungsentkopplung wurde erst auf den Gelenkkoordinaten (d.h. verallgemeinerten Koordinaten) entwickelt. Die Führungsgrößen müssen zuerst durch die Koordinatentransformation ermittelt werden. Geregelt werden die Abweichungen der Gelenkverrückungen anstelle der Bahnabweichung im Kartesischen Weltkoordinatensystem. Das Konzept der Rückführungsentkopplung läßt sich prinzipiell auch auf die Ausgangsgröße des Endeffektors im Kartesischen Weltkoordinatensystem anwenden. Damit wird die Bewegung des Endeffektors unmittelbar geregelt. Ein wesentlicher Vorteil

der Kartesischen Lageregelung durch die Rückführungsentkopplung besteht darin [33], daß die Position und Orientierung des Endeffektors direkt im Kartesischen Weltkoordinatensystem gemessen und geregelt werden können unter Umgehung störender Nichtlinearitäten und Elastizitäten in den Antriebsachsen und Getrieben.

Beim Entwurf der Kartesischen Lageregelung besteht noch die Schwierigkeit, die Orientierungsabweichung zu definieren. Die meisten Wissenschaftler [6, 22, 55] umgingen dieses Problem und befaßten sich nur mit der Positionsabweichung. Nur Luh, Walker und Paul [41] zeigten bisher einen Ausweg auf, indem sie die Orientierung als  $(\sin\theta \underline{u})$  definierten, wobei  $\underline{u}$  der Einheitsvektor der Drehachse und  $\theta$  der Drehwinkel von der Istorientierung zur Sollorientierung des Endeffektors ist. Im Gegensatz dazu werden in der vorliegenden Arbeit zur Überwindung des Orientierungsproblems die Eulerschen Parameter angewendet. Die Überlegenheit der Eulerschen Parameter bei diesem Problem rührt von der ausführlichen Theorie und Simulation her.

Das letzte Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, die für eine einfache offene Kette entwickelten Modelle auf Roboter mit geschlossenen Ketten zu erweitern. Weil das in dieser Arbeit eingeführte Eingangsachsen-Koordinatensystem sich auch für geschlossene Ketten besonders gut eignet, wird das kinematische Problem so einfach wie bei einer offenen Kette behandelt.

Die Schwierigkeit liegt darin, daß das dynamische System einer geschlossenen Kette holonom ist, da in einer geschlossenen Schleife holonome Zwangsbedingungen existieren. Bei dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen werden üblicherweise die Lagrangeschen Multiplikatoren verwendet. Das hat aber zur Folge, daß auf die sich für offene Ketten eignende rekursive Newton-Eulersche Formulierung verzichtet werden muß.

Dafür wird in der vorliegenden Arbeit die dynamische Beziehung zwischen offenen und geschlossenen Ketten ermittelt. Damit kann man virtuell jede geschlossene Schleife in zwei offene Ketten schneiden, um durch die üblichen Methoden die dynamischen Gleichungen jeder virtuell geschnittenen offenen Kette herzuleiten. Anschließend können die dynamischen Gleichungen der geschlossenen Kette einfach durch die Verkopplung von den dynamischen Gleichungen jeweiliger virtuell offener Ketten und der dynamischen Beziehung zwischen offenen und geschlossenen Ketten erhalten werden. Dann können alle Modelle, die erst für offene Ketten entwickelt werden, auch auf geschlossene Ketten angewendet werden.

## 2 KÖRPERFESTE KOORDINATENSYSTEME

### 2.1 Konventionelle körperfeste Koordinatensysteme

Eine kinematische Kette wie z.B. ein Roboter besteht aus einer Reihe von Gliedkörpern, die miteinander durch Gelenke verbunden sind. Zur Beschreibung der Bewegung einer Kette ist ein körperfestes Koordinatensystem ein nützliches Hilfsmittel. Ein körperfestes Koordinatensystem ist ein System, das aus allen auf den jeweiligen Körpern festgelegten Koordinatenbasen (Frame) besteht.

Die zwei in der Vergangenheit vorwiegend benutzten körperfesten Koordinatensysteme sind das Denavit-Hartenberg-System [9, 21] und das Hauptachsen-Koordinatensystem [26, 68]. Unter dem Einfluß der Reuleauxschen Begriffserklärungen [54] entwickelten Denavit und Hartenberg [9, 21] eine neue Zeichensprache für die Getriebelehre, die heute unter dem Namen Denavit-Hartenberg-Notation bekannt ist. Mit diesem System können ein Getriebe und seine getrieblichen Zusammenhänge mathematisch eindeutig beschrieben werden. Vor zwei Jahrzehnten wurde die Denavit-Hartenberg-Notation für die Kinematik von Robotern übernommen, und sie wird heute vorwiegend in der Robotik verwendet [51].

Das andere Koordinatensystem ergab sich aus der Dynamik des Mehrkörpersystems. Weil die Eulerschen Gleichungen nur für den Schwerpunkt eines Körpers gelten und am einfachsten werden, wenn sich die Gleichungen auf die Hauptträgheitsachsen beziehen, war es am naheliegendsten, die körperfesten Koordinaten, die mit den Hauptachsen übereinstimmen, in Erwägung zu ziehen. Dieses körperfeste Koordinatensystem wurde überwiegend auf die Dynamik des Mehrkörpersystems angewendet.

Beide Koordinatensysteme haben jedoch Nachteile. Einige Forscher [19, 28, 29, 37] bemühten sich um Verbesserungen. Die bisherigen Erfindungen können in der Theorie des



allgemeinen Eingangsachsen-Koordinatensystems zusammengefaßt werden. Im folgenden werden zunächst die beiden konventionellen Koordinatensysteme kurz dargestellt, um später einen Vergleich zwischen verschiedenen Koordinatensystemen anzustellen.

### 2.1.1 Denavit-Hartenberg-Notation

Die kinematische Beziehung von zwei Gelenken, die sich an den zwei Enden eines Gliedes gegenüberstehen, ist bestimmbar mittels vier ausreichender Parameter der Denavit-Hartenberg-Notation.

Das eine Gelenk, welches das Glied treibt, wird Eingangs-gelenk genannt — seine Achse wird auch Eingangsachse (z.B. Antriebsachse bei Robotern) genannt —, das andere heißt Ausgangsgelenk bzw. Ausgangsachse.

Eine körperfeste Koordinatenbasis  $E_i = \{0_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i\}$  wird an der Ausgangsachse des jeweiligen Gliedes errichtet. Die z-Achse stimmt mit der Ausgangsachse, die x-Achse mit der gemeinsamen Normalen der Eingangs- und Ausgangsachse überein. Der Ursprung ist jedoch der Schnittpunkt von x- und z-Achse, d.h. von der Ausgangsachse und der gemeinsamen Normalen. Deshalb ist die Beziehung zweier Gelenke zueinander gerade die der zwei jeweiligen Koordinatenbasen als auch die der zwei jeweiligen Glieder.

Zwischen zwei nebeneinander liegenden Koordinatenbasen gibt es vier Beziehungsparameter,  $d_i$ ,  $b_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\theta_i$  (s. Bild 2.1). Die Koordinatentransformation von  $E_{i-1}$  zu  $E_i$  ist aus vier Teiltransformationen zusammengesetzt:

1. einer Translationstransformation von  $d_i$  entlang  $\underline{z}_{i-1}$ ,
2. einer Rotationstransformation von  $\theta_i$  um  $\underline{z}_{i-1}$ ,

3. einer Translationstransformation von  $b_i$  entlang  $\underline{x}_i$ , mit der auch die durch Schritt 1 und 2 transformierte  $\underline{x}_{i-1}$  übereinstimmt,
4. einer Rotationstransformation von  $\beta_i$  um  $\underline{x}_i$ .

In einer Homogenmatrixschreibweise ist die Beziehung der Koordinatentransformation von  $E_{i-1}$  zu  $E_i$  wie folgt:

$${}_{i-1}^i\mathbf{H} = \mathbf{H}_T(0, 0, d_i) \mathbf{H}_R(z, \theta_i) \mathbf{H}_T(b_i, 0, 0) \mathbf{H}_R(\underline{x}, \beta_i) \quad (2.1)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\beta_i \sin\theta_i & \sin\beta_i \sin\theta_i & b_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\beta_i \cos\theta_i & -\sin\beta_i \cos\theta_i & b_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\beta_i & \cos\beta_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

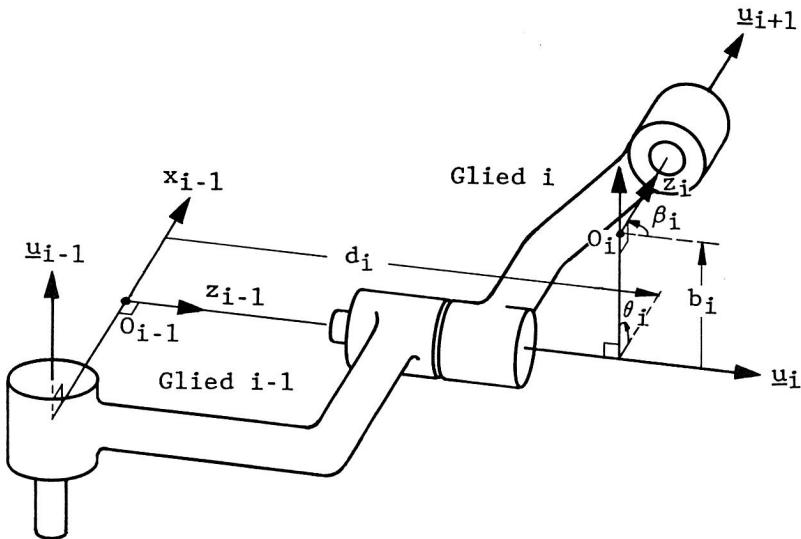
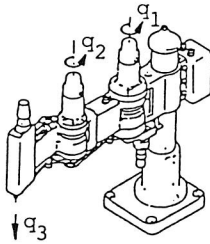
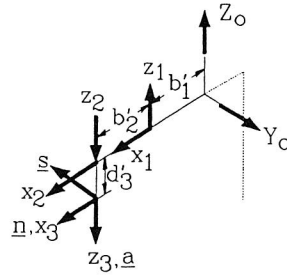


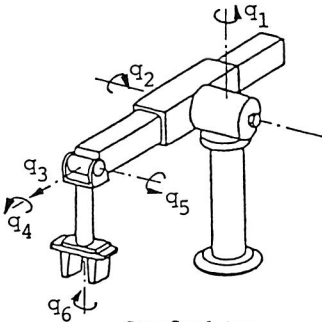
Bild 2-1. Denavit-Hartenberg-Notation



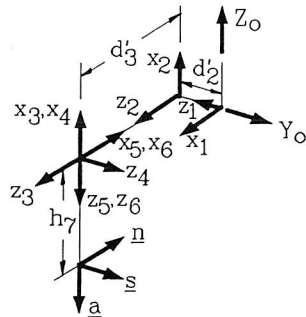
Schwenkarm



Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	$b$	$d$	$h_x$	$h_y$	$h_z$	Schwerpunkt		
									$c_x$	$c_y$	$c_z$
1 (R)	$E_0$	$q_1+0$	0	$b'_1$	0	$b'_1$	0	0			
	$E_1$								$c_1$	0	0
2 (R)	$E_2$	$q_2+0$	$180^\circ$	$b'_2$	0	$b'_2$	0	0	$c_2$	0	0
3 (R)	$E_3$	0	0	0	$q_3+d'_3$	0	0	$-q_3-d'_3$	0	0	$c_3$
—	$E_E$	—	0	0	0	0	0	0			



Stanford-Arm



Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	$b$	$d$	$h_x$	$h_y$	$h_z$	Schwerpunkt		
									$c_x$	$c_y$	$c_z$
1 (R)	$E_0$	$q_1+0$	$90^\circ$	0	0	0	0	0			
	$E_1$								0	-1,75	-11,05
2 (R)	$E_2$	$q_2+90^\circ$	$90^\circ$	0	$d'_2$	0	$d'_2$	0	0	-10,54	0
3 (T)	$E_3$	0	0	0	$q_3+d'_3$	0	0	$q_3+d'_3$	0	0	-64,47
4 (R)	$E_4$	$q_4+0$	$90^\circ$	0	0	0	0	0	0,92	0	-0,54
5 (R)	$E_5$	$q_5-90^\circ$	$90^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	5,66
6 (R)	$E_6$	$q_6+0$	0	0	0	0	0	0	0	0	15,54
—	$E_E$	—	0	0	$h_7$	0	0	$h_7$			

Bild 2-2. Anwendung der Denavit-Hartenberg-Notation auf zwei Industrieroboter



Gelenke als null angenommen werden. Bild 2-3 stellt die Nullkonfiguration zweier Glieder dar. Die homogene Transformationsmatrix in der Nullkonfiguration

$${}_{i-1}\overset{i}{H}_r = \begin{bmatrix} {}_{i-1}\overset{i}{R}_r & ({}_{i-1}\overset{i}{r}^{<i-1>} + \overset{i}{r}^{<i-1>}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

kann durch die Methode in [68] bestimmt werden. Hierbei bedeuten:

- Rechtsunterzeichen "r" die Nullkonfiguration,
- ${}_{i-1}\overset{i}{r}$  und  $\overset{i}{r}$  die in Bild 2-3 gezeigten Vektoren,
- Rechtsoberzeichen "<i-1>" an einem Vektor, daß der Wert des Vektors in bezug auf die Koordinatenbasis  $E_{i-1}$  dargestellt ist, und

$$\overset{i}{r}^{<i-1>} = {}_{i-1}\overset{i}{R} \overset{i}{r}^{<i>}. \quad (2.3)$$

Wenn das Gelenk i ein Schubgelenk ist, bleibt die Beziehung der Orientierungen beider Koordinatenbasen zueinander immer gleich, und es ändert sich nur der Abstand zwischen beiden Ursprüngen. Deshalb lautet für das Schubgelenk i die aktuelle homogene Transformationsmatrix:

$${}_{i-1}\overset{i}{H} = \begin{bmatrix} {}_{i-1}\overset{i}{R}_r & ({}_{i-1}\overset{i}{r}^{<i-1>} + \overset{i}{r}^{<i-1>} + q_i \underline{u}_i^{<i-1>}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

mit  $q_i$  als Verrückung des Gelenks.

Die Beziehung der zwei Koordinatenbasen zueinander zwischen einem Drehgelenk kann durch die Transformation  ${}_{i-1}\overset{i}{H}_r$  und eine Rotation von  $q_i$  um  $\underline{u}_i$  bestimmt werden:

$${}_{i-1}\overset{i}{H} = {}_{i-1}\overset{i}{H}_r H_R(\underline{u}_i^{<i>}, q_i) \quad (2.5)$$

$$= i-1 \underline{H}_r \begin{bmatrix} \text{Rot}(\underline{u}_i^{<i>}, q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei [51]

$$\text{Rot}(\underline{u}_i^{<i>}, q_i) = \begin{bmatrix} u_x^2 (1-\cos q_i) + \cos q_i & u_x u_y (1-\cos q_i) + u_z \sin q_i & u_y u_x (1-\cos q_i) - u_z \sin q_i & u_z u_x (1-\cos q_i) + u_y \sin q_i \\ u_x u_y (1-\cos q_i) + u_z \sin q_i & u_y^2 (1-\cos q_i) + \cos q_i & u_z u_y (1-\cos q_i) - u_x \sin q_i & u_z u_y (1-\cos q_i) - u_x \sin q_i \\ u_y u_x (1-\cos q_i) - u_z \sin q_i & u_z u_y (1-\cos q_i) - u_x \sin q_i & u_x^2 (1-\cos q_i) + \cos q_i & u_x u_z (1-\cos q_i) + u_y \sin q_i \\ u_x u_z (1-\cos q_i) + u_y \sin q_i & u_z^2 (1-\cos q_i) + \cos q_i & u_x u_z (1-\cos q_i) + u_y \sin q_i & u_z^2 (1-\cos q_i) + \cos q_i \end{bmatrix},$$

(2.6)

$$\underline{u}_i^{<i>} \triangleq [u_x \quad u_y \quad u_z]^T,$$

und das Rechtsoberzeichen "T" Transponierung bedeutet. Offensichtlich ist dieses Koordinatensystem komplizierter und rechenaufwendiger als die Denavit-Hartenbergsche Methode.

## 2.2 Eingangsachsen-Koordinatensystem

### 2.2.1 Allgemeine Theorie

Bei der Betrachtung der konventionellen Koordinatensysteme bietet sich eine Alternative an. Wenn jede körperfeste Koordinatenbasis an der jeweiligen Eingangsachse festgelegt wird, dann ist die Bewegung jedes Punktes im jeweiligen Glied durch Verwendung von Vektoren leicht zu beschreiben. Auf diese Weise wird auch die physikalische Bedeutung anschaulich dargestellt, weil das Glied von der Eingangsachse angetrieben wird. Das Konzept des Eingangsachsen-Koordinatensystems wird schon in der vektoriellen Mechanik verwendet; eine systematische Untersuchung fehlt aber noch. An dieser Stelle wird eine allgemeine Theorie des Eingangs-

achsen-Koordinatensystems vorgelegt.

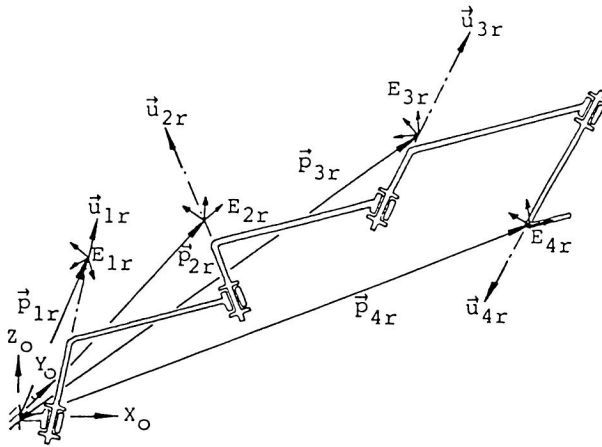
Die Koordinatenbasen im allgemeinen Eingangsachsen-Koordinatensystem liegen an den jeweiligen Eingangsachsen; deren Orientierungen und Ursprünge aber sind beliebig. Bild 2-4(a) zeigt ein Beispiel solcher Koordinatenbasen  $E_{ir}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , die an den Eingangsachsen  $\vec{u}_{ir}$  in der Nullkonfiguration (Referenzkonfiguration) liegen, in der die Verrückungen  $q_i$  gleich null sind. Damit diese von der aktuellen Konfiguration unterschieden werden kann, wird hier auch das Rechtsunterzeichen "r" benutzt.  $\vec{p}_{ir}$  ist der Abstandsvektor vom Ursprung der Gestellbasis  $E_0$  zu dem von  $E_i$ . In der aktuellen Konfiguration sind die Verrückungen nicht mehr gleich null, sondern  $q_i = \theta_i$  (s. Bild 2-4(b)), und  $E_i$ ,  $\vec{u}_i$ ,  $\vec{p}_i$  ändern sich mit der Zeit. Der Einfachheit halber betrachten wir statt der Homogenmatrix zunächst die Koordinatentransformationsmatrix, d.h. nur die Beziehungen von bloß Orientierungen der Koordinatenbasen. Die Koordinatentransformation von  $E_{(i-1)r}$  zu  $E_{ir}$  wird z.B. mit einer  $3 \times 3$  Matrix  $(i-1)_{ir}^R$  beschrieben. Die Homogenmatrix wird später hergeleitet.

Die Transformation von  $E_0$  zu  $E_4$  kann in vier Teiltransformationen unterteilt werden:

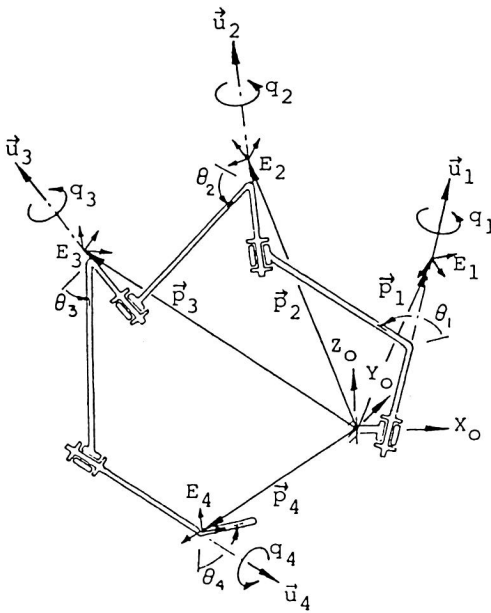
1. von  $E_0$  zu  $E_1$ ,
2. von  $E_1$  zu  $E_2$ ,
3. von  $E_2$  zu  $E_3$  und
4. von  $E_3$  zu  $E_4$ .

Jede kann noch einmal in zwei Schritte unterteilt werden:

1. die Transformation äquivalent zu der von  $E_{(i-1)r}$  zu  $E_{ir}$ ,  
d.h.  $(i-1)_{ir}^R$ ,



(a)



(b)

Bild 2-4. Allgemeines Eingangachsen-Koordinatensystem:  
(a) Nullkonfiguration (b) aktuelle Konfiguration



2. die Rotation von  $\theta_i$  um  $\vec{u}_i$ , wenn das Gelenk i ein Drehgelenk ist; sonst  $\theta_i = 0$ .

Da  $\vec{u}_i$  der Einheitsvektor einer Drehachse ist, bleibt dessen auf  $E_i$  bzw.  $E_{i-1}$  bezogene Darstellung konstant. Deshalb lautet die Transformationsmatrix von  $E_{i-1}$  zu  $E_i$ :

$${}_{i-1}R_i = ({}_{i-1}R_r \text{ Rot}(\underline{u}_i^{<i>, \theta_i), \quad (2.7)$$

wobei  $\text{Rot}(\cdot)$  als eine Rotationsmatrix schon in Gl.(2.6) definiert wurde und das Rechtsoberzeichen "<i>" die auf Koordinatenbasis  $E_i$  bezogene Darstellung bezeichnet. Die Transformationsmatrix von  $E_0$  zu  $E_4$  lautet dann:

$${}^0R_4 = {}^0R_1 {}^1R_2 {}^2R_3 {}^3R_4. \quad (2.8)$$

Aus der Unveränderlichkeit von  $\underline{u}_i^{<i-1>}$  folgt auch:

$$P_i^{<i-1>} - P_{i-1}^{<i-1>} = P_{ir}^{<(i-1)r>} - P_{(i-1)r}^{<(i-1)r>} + K_i q_i \underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>}, \quad (2.9)$$

wobei

$$K_i = \begin{cases} 0, & \text{wenn das Gelenk i ein Drehgelenk ist,} \\ 1, & \text{wenn das Gelenk i ein Schubgelenk ist;} \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\underline{u}_i^{<i-1>} = \underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>}. \quad (2.11)$$

Durch die Einführung der neuen Variablen

$$\underline{h}_i^{<i-1>} \triangleq P_i^{<i-1>} - P_{i-1}^{<i-1>} \quad (2.12)$$

wird die Berechnung von  $P_i^{<m>}$ ,  $m < i$ , nach den Grundsätzen der Geometrie vereinfacht, wie z.B. in:

$$P_4^{<2>} = P_3^{<2>} + {}^3R_4 \underline{h}_4^{<3>}. \quad (2.13)$$

Nach der Subtraktion von  $P_2^{<2>}$  auf beiden Seiten kann die

Gl.(2.13) in eine Matrixschreibweise überführt werden:

$$\begin{bmatrix} p_4^{<2>} & - & p_2^{<2>} \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}R & h_3^{<2>} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_4^{<3>} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

In Verbindung mit

$${}^i_m H = \begin{bmatrix} {}^i_m R & (h_{m+1}^{<m>} + \dots + h_i^{<m>}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad m < i \quad (2.15)$$

folgen

$$\begin{bmatrix} p_i^{<m>} & - & p_m^{<m>} \\ & & 1 \end{bmatrix} = {}^{i-1}_m H \begin{bmatrix} h_i^{<i-1>} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

und

$${}^i_o H = {}^1_o H \ {}^2_1 H \ \dots \ {}^{i-1}_{i-1} H, \quad (2.17)$$

$${}^{i-1}_{i-1} H = (i-1)r_H \begin{bmatrix} \text{Rot}(\underline{u}_i^{<i>}, \theta_i) & (K_i \ q_i \ \underline{u}_i^{<i-1>}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Analog wird für einen im Gelenk  $i$  festgelegten Punkt, dessen Abstand zum Ursprung von  $E_o$  mit  $\vec{b}_i$  bezeichnet wird, sein Abstand zum Ursprung von  $E_m$  folgendermaßen berechnet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} b_i^{<m>} & - & p_m^{<m>} \\ & & 1 \end{bmatrix} &= {}^{i-1}_m H \begin{bmatrix} h_i^{<i-1>} \\ 1 \end{bmatrix} + {}^i_m H \begin{bmatrix} b_i^{<i>} & - & p_i^{<i>} \\ & & 0 \end{bmatrix} \\ &= {}^{i-1}_m H \left( \begin{bmatrix} h_i^{<i-1>} \\ 1 \end{bmatrix} + {}^{i-1}_i H \begin{bmatrix} b_i^{<i>} & - & p_i^{<i>} \\ & & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= {}^i_m H \begin{bmatrix} b_i^{<i>} & - & p_i^{<i>} \\ & & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

In der Literatur heißt  $\underline{i}_m^i$  homogene Transformationsmatrix. Sie beschreibt die Beziehung der Abstände desselben Punktes zu den Ursprüngen zweier unterschiedlicher Koordinatenbasen. Andererseits wird die Beziehung desselben Punktes in der Nullkonfiguration und der aktuellen Konfiguration wie folgt hergeleitet:

$$\begin{aligned} \underline{b}_4^{<0>} &= \underline{h}_1^{<0>} + \underline{1}_R \underline{h}_2^{<1>} + \underline{2}_R \underline{h}_3^{<2>} + \underline{3}_R \underline{h}_4^{<3>} + \underline{4}_R (\underline{b}_4^{<4>} - \underline{p}_4^{<4>}) \\ &= \underline{p}_{1r}^{<0>} + K_1 q_1 \underline{u}_{1r}^{<0>} + \sum_{i=2}^4 i-1 \underline{0}_R (\underline{p}_{ir}^{<(i-1)r>} - \underline{p}_{(i-1)r}^{<(i-1)r>} \\ &\quad + K_i q_i \underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>}) + \underline{4}_R (\underline{b}_{4r}^{<4r>} - \underline{p}_{4r}^{<4r>}) \\ &= \sum_{i=1}^4 i-1 \underline{0}_R (\underline{p}_{ir}^{<(i-1)r>} - i-1 \underline{1}_R \underline{p}_{ir}^{<ir>}) + K_i q_i \underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>} + \underline{4}_R \underline{b}_{4r}^{<4r>}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Die Gl.(2.20) wird auch in einer Matrixschreibweise umformuliert:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_4^{<0>} \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{1}_D \underline{2}_D \underline{3}_D \underline{4}_D \begin{bmatrix} \underline{4}_R \underline{b}_{4r}^{<0>} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

wobei

$$i-1 \underline{1}_D \triangleq \begin{bmatrix} i-1 \underline{1}_R & i-1 \underline{1}_d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} i-1 \underline{1}_d &\triangleq \underline{p}_{ir}^{<(i-1)r>} - i-1 \underline{1}_R \underline{p}_{ir}^{<ir>} + K_i q_i \underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>} \\ &= \underline{p}_{ir}^{<(i-1)r>} - \text{Rot}(\underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>}, \theta_i) \underline{p}_{ir}^{<(i-1)r>} + K_i q_i \underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

weil

$$i-1 \underline{1}_R = \text{Rot}(\underline{u}_{ir}^{<(i-1)r>}, \theta_i) (i-1) \underline{1}_R. \quad (2.24)$$

Die Gl.(2.24) stellt eine Vormultiplikation dar auf der

Grundlage dessen, daß alle Vektoren in bezug auf dieselbe Koordinatenbasis  $E_{(i-1)r}$  dargestellt sind [51]. Das Resultat von Gl.(2.21) ist gleich dem von Gl.(2.19), wenn  $i = 4$ ,  $m = 0$ .  ${}_{i-1}^iD$  ist die sogenannte Schraubenverrückungsmatrix, die zuerst zur Beschreibung der Verrückung einer Schraube hergeleitet worden war. Offensichtlich ist sie komplizierter und rechenaufwendiger als die homogene Transformationsmatrix.

Nicht alle Eingangsachsen-Koordinatensysteme sind praktisch anwendbar und leicht aufstellbar. Im folgenden werden zwei günstigere Systeme eingeführt.

### 2.2.2 Normales Eingangsachsen-Koordinatensystem

Das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem ist eine Kombination des allgemeinen Eingangsachsen-Koordinatensystems mit dem Konzept der Denavit-Hartenberg-Notation und wurde schon in [29, 37, 77] erörtert.

Die z-Achse jeder Koordinatenbasis wird zuerst an die jeweilige Eingangsachse gelegt. Dann wird die gemeinsame Normale gesucht, die orthogonal zur Eingangs- und Ausgangsachse eines Gliedes ist. Die Richtung entlang der gemeinsamen Normalen von der Eingangsachse nach der Ausgangsachse wird als x-Richtung gewählt. Der Ursprung einer Koordinatenbasis ist jedoch der Schnittpunkt der x- und z-Achse, also auch der gemeinsamen Normalen und der Eingangsachse. So ist z.B. bei Glied  $i-1$  in Bild 2-5  $\underline{x}_{i-1}$  die gemeinsame Normale von  $\underline{z}_{i-1}$  und  $\underline{z}_i$ , der Ursprung von  $E_{i-1}$  ist  $O_{i-1}$ . Diese Angaben bestimmen hinreichend eine rechtshändige Kartesische Koordinatenbasis.

Schneiden sich die Eingangs- und Ausgangsachse eines Gliedes, so liegt der Ursprung in diesem Schnittpunkt. Die x-Richtung erhält man aus dem Vektorprodukt der Einheitsvektoren an der Eingangsachse und der Ausgangsachse (z.B.  $O_i$

und  $\underline{x}_i = \underline{z}_i \times \underline{z}_{i+1}$  bei Gelenk  $i$  in Bild 2-5).

Sind die beiden Achsen parallel, kann der Ursprung beliebig gewählt werden. Es empfiehlt sich, daß für eine kinematische Aufgabe die  $x$ -Achse durch den Ursprung der nächsten nachfolgenden Koordinatenbasis geht (z.B.  $\underline{x}_{j-1}$ ), für eine dynamische Aufgabe (z.B. ein inverses System) dagegen durch den Schwerpunkt des Gelenks, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

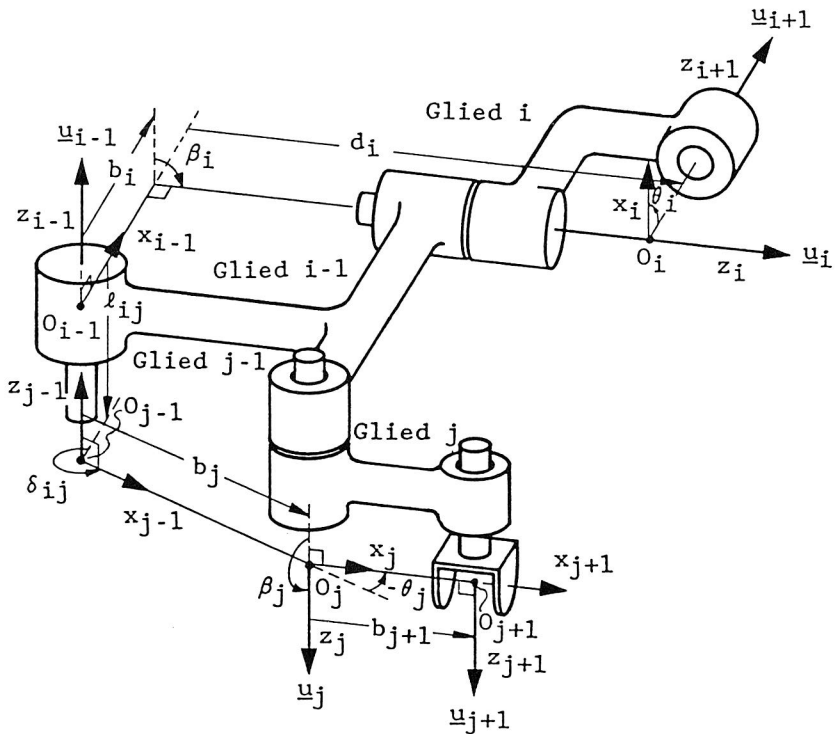


Bild 2-5. Beschreibung des normalen Eingangssachsen-Koordinatensystems

Wie bei der Denavit-Hartenberg-Notation gibt es auch hier zwischen zwei nebeneinander stehenden Koordinatenbasen vier Beziehungsparameter:

$b_i$ : Kreuzungsabstand von  $\underline{z}_{i-1}$  zu  $\underline{z}_i$ , positiv in Richtung  $\underline{x}_{i-1}$ ,

$\beta_i$ : Kreuzungswinkel zwischen  $\underline{z}_{i-1}$  und  $\underline{z}_i$ , positiv für eine Rechtsschraube von  $\underline{z}_{i-1}$  zu  $\underline{z}_i$ ,

$d_i$ : Kreuzungsabstand von  $\underline{x}_{i-1}$  zu  $\underline{x}_i$ , positiv in Richtung  $\underline{z}_i$ ; und

$$d_i = \begin{cases} d_i', & \text{für die Rotationsachse } i, \\ d_i' + q_i, & \text{für die Translationsachse } i, \end{cases}$$

mit der Translationsgröße  $q_i$ , und  $d_i'$  als Nullpositions-  
wert,

$\theta_i$ : Kreuzungswinkel zwischen  $\underline{x}_{i-1}$  und  $\underline{x}_i$ , positiv für eine Rechtsschraube von  $\underline{x}_{i-1}$  zu  $\underline{x}_i$ ; und

$$\theta_i = \begin{cases} \theta_i' + q_i, & \text{für die Rotationsachse } i, \\ \theta_i', & \text{für die Translationsachse } i, \end{cases}$$

mit der Rotationsgröße  $q_i$ , und  $\theta_i'$  als Nullpositionswert.

Diese vier Parameter bestimmen die Koordinatentransformation durch vier Schritte:

1. eine Translationstransformation von  $b_i$  entlang  $\underline{x}_{i-1}$ ,
2. eine Rotationstransformation von  $\beta_i$  um  $\underline{x}_{i-1}$ ,
3. eine Translationstransformation von  $d_i$  entlang  $\underline{z}_i$ ,
4. eine Rotationstransformation von  $\theta_i$  um  $\underline{z}_i$ .

Die Schritte 1 und 2 sind in der Reihenfolge ihrer Durchführung austauschbar, ebenso die Schritte 3 und 4, nicht jedoch die Schritte 2 und 3.

In der Nullkonfiguration sind alle Achsverrückungen  $q_i$  gleich null. Damit ist die Koordinatentransformation von  $E_{(i-1)r}$  zu  $E_{ir}$ :

$$(i-1)_{rH}^{ir} = \underline{H}_T(b_i, 0, 0) \underline{H}_R(\underline{x}, \beta_i) \underline{H}_T(0, 0, d_i') \underline{H}_R(\underline{z}, \theta_i')$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_i & -\sin\beta_i & 0 \\ 0 & \sin\beta_i & \cos\beta_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i' \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_i' & -\sin\theta_i' & 0 & 0 \\ \sin\theta_i' & \cos\theta_i' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Gemäß den Gln.(2.18) und (2.25) folgt dann:

$$i-1_H^i = (i-1)_{rH}^{ir} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Rot}(\underline{z}, (1-K_i)q_i) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & b_i \\ \cos\beta_i \sin\theta_i & \cos\beta_i \cos\theta_i & -\sin\beta_i & -d_i \sin\beta_i \\ \sin\beta_i \sin\theta_i & \sin\beta_i \cos\theta_i & \cos\beta_i & d_i \cos\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Selbstverständlich kann man auch  $i-1_H^i$  unmittelbar erhalten aus:

$$i-1_H^i = \underline{H}_T(b_i, 0, 0) \underline{H}_R(\underline{x}, \beta_i) \underline{H}_T(0, 0, d_i) \underline{H}_R(\underline{z}, \theta_i). \quad (2.27)$$

Obwohl die Gestellkoordinatenbasis beliebig aufgestellt werden kann, sollte sie am besten mit der Nullposition der ersten körperfesten Koordinatenbasis übereinstimmen, damit

gilt:

$$b_1 = d_1' = 0, \quad \beta_1 = \theta_1' = 0^\circ.$$

Der Rechenaufwand wird dadurch reduziert. Zusätzlich wird der Ursprung der letzten äußeren Koordinatenbasis möglichst in den Schnittpunkt der Antriebsachse und der gemeinsamen Normalen (d.h.  $d_n = 0$ ) gelegt oder aber in den Greifermittelpunkt (z.B.  $O_{j+1}$ ).

Wenn ein Gelenk mehr als eine Ausgangsachse hat, d.h. wenn eine Zweigstruktur vorliegt, hat es gemäß der oben erwähnten Zuordnung auch mehr als eine körperfeste Koordinatenbasis, die an derselben Achse (der Antriebsachse), aber an unterschiedlichen Punkten liegt (s. Bild 2-5). Die Transformation zwischen beiden besteht aus zwei Schritten:

1. einer Translationstransformation entlang der Antriebsachse und
2. einer Rotationstransformation um die Antriebsachse.

Sie bleibt immer konstant.

Die Beziehung der Koordinatenbasis  $E_{i-1}$  zu  $E_{j-1}$  in Bild 2-5 ist beispielsweise:

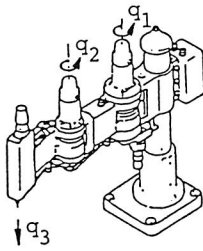
$${}_{i-1}^{j-1}\underline{H} = \underline{H}_T(0, 0, l_{ij}) \underline{H}_R(z, \delta_{ij}) \quad (2.28)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\delta_{ij} & -\sin\delta_{ij} & 0 & 0 \\ \sin\delta_{ij} & \cos\delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{ij} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

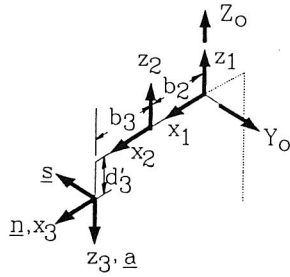
und

$${}_{i-1}^j \underline{H} = {}_{i-1}^{j-1} \underline{H} \quad {}_{j-1}^j \underline{H}. \quad (2.29)$$

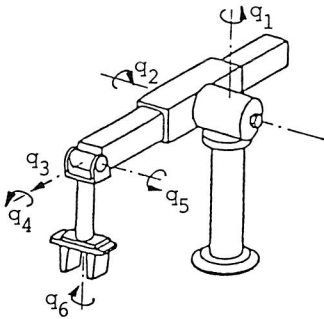




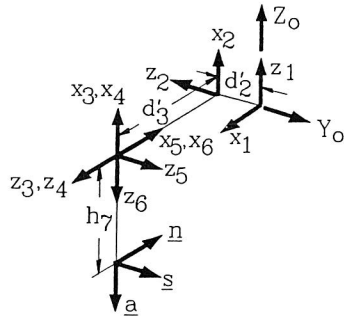
Schwenkarm



Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	$b$	$d$	$h_x$	$h_y$	$h_z$	Schwerpunkt		
									$c_x$	$c_y$	$c_z$
1 (R)	$E_0$	$q_1+0$	0	0	0	0	0	0			
	$E_1$								$c_1$	0	0
2 (R)	$E_2$	$q_2+0$	0	$b_2$	0	$b_2$	0	0	$c_2$	0	0
3 (R)	$E_3$	0	$180^\circ$	$b_3$	$q_3+d'_3$	$b_3$	0	$-q_3-d'_3$	0	0	$c_3$
—	$E_E$	—	0	0	0	0	0	0			



Stanford-Arm



Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	$b$	$d$	$h_x$	$h_y$	$h_z$	Schwerpunkt		
									$c_x$	$c_y$	$c_z$
1 (R)	$E_0$	$q_1+0$	0	0	0	0	0	0			
	$E_1$								0	11,05	- 1,75
2 (R)	$E_2$	$q_2+90^\circ$	$90^\circ$	0	$d'_2$	0	$-d'_2$	0	0	0	-10,54
3 (T)	$E_3$	0	$90^\circ$	0	$q_3+d'_3$	0	$-q_3-d'_3$	0	0	0	-64,47
4 (R)	$E_4$	$q_4+0$	0	0	0	0	0	0	0,92	0,54	0
5 (R)	$E_5$	$q_5-90^\circ$	$90^\circ$	0	0	0	0	0	0	- 5,66	0
6 (R)	$E_6$	$q_6+0$	$90^\circ$	0	0	0	0	0	0	0	15,54
—	$E_E$	—	0	0	$h_7$	0	0	$h_7$			

Bild 2-6. Anwendung des normalen Eingangsachsen-Koordinatensystems auf zwei Industrieroboter.

Der Schwenkarm und der Stanford-Arm werden hier nochmals als Beispiele hergenommen. Bild 2-6 zeigt deren normale Eingangsachsen-Koordinatensysteme.

### 2.2.3 Einfaches Eingangsachsen-Koordinatensystem

Nach Gl.(2.7) liegt der Schluß nahe, daß die Berechnung von Gl.(2.18) einfacher würde, wenn sich die Orientierungen aller Koordinatenbasen nach derselben Orientierung (z.B. nach der der Gestellkoordinatenbasis) ausrichten würden, d.h.  ${}^{i-1}\underline{\underline{r}}_R = \underline{\underline{I}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , mit  $\underline{\underline{I}}$  als Einheitsmatrix.

Das einfache Eingangsachsen-Koordinatensystem bietet sich an. In diesem Fall ist die Aufstellung der Koordinatenbasen ganz einfach, und die Ursprünge sind noch beliebig. Die homogene Transformationsmatrix und die Schraubenverrückungsmatrix des einfachen Eingangsachsen-Koordinatensystems werden dann:

$${}^{i-1}\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\underline{\underline{u}}_{ir}^{<o>}, (1-K_i)q_i) & \underline{\underline{h}}_i^{<i-1>} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$\underline{\underline{h}}_i^{<i-1>} = \underline{\underline{p}}_{ir}^{<o>} - \underline{\underline{p}}_{(i-1)r}^{<o>} + K_i q_i \underline{\underline{u}}_{ir}^{<o>} \quad (2.31)$$

und

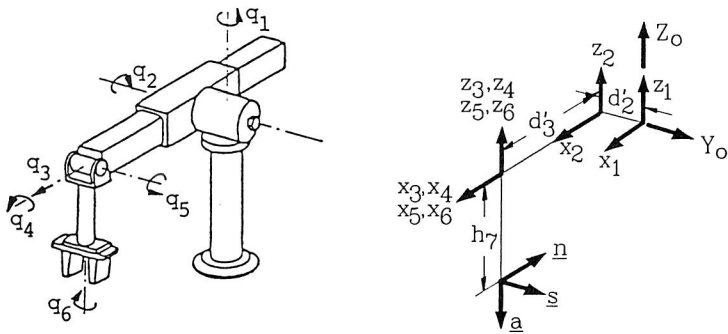
$${}^{i-1}\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\underline{\underline{u}}_{ir}^{<o>}, (1-K_i)q_i) & {}^{i-1}\underline{\underline{d}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$${}^{i-1}\underline{\underline{d}} = [\underline{\underline{I}} - \text{Rot}(\underline{\underline{u}}_{ir}^{<o>}, (1-K_i)q_i)] \underline{\underline{p}}_{ir}^{<o>} + K_i q_i \underline{\underline{u}}_{ir}^{<o>}. \quad (2.33)$$

Werden die Gln.(2.32) und (2.33) mit der Guptaschen Methode (zero reference position description) [19, 20, 28] verglichen, ist ersichtlich, daß die Guptasche Methode äquivalent zu diesem Koordinatensystem ist, obwohl Gupta zur Beschreibung der kinematischen Bewegung einer offenen Kette

keine Koordinatenbasen, sondern nur die Schraubenverrückungsmatrix benutzte.

Wie bereits erwähnt, ist die Schraubenverrückungsmatrix immer umständlich zu handhaben und nicht empfehlenswert. Ein Beispiel der Anwendung des einfachen Eingangsachsen-Koordinatensystems auf den Stanford-Arm ist in Bild 2-7 gezeigt.



Stanford-Arm

Gelenk	Basis	E	Rot( $\underline{u}_i^{<i-1>}, \theta_i$ )					$\underline{h}_i^{<i-1>}$		
			$u_x$	$u_y$	$u_z$	$\theta$		$h_x$	$h_y$	$h_z$
1	Z <sub>1</sub>	E <sub>0</sub>	0	0	1	q <sub>1</sub>		0	0	0
2	-Y <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	0	-1	0	q <sub>2</sub>		0	-d' <sub>2</sub>	0
3	X <sub>3</sub>	E <sub>2</sub>	—			0		d' <sub>3</sub> +q <sub>3</sub>	0	0
4	X <sub>4</sub>	E <sub>3</sub>	1	0	0	q <sub>4</sub>		0	0	0
5	Y <sub>5</sub>	E <sub>4</sub>	0	1	0	q <sub>5</sub>		0	0	0
6	-Z <sub>6</sub>	E <sub>5</sub>	0	0	-1	q <sub>6</sub>		0	0	0
		E <sub>6</sub>	0	1	0	180°		0	0	-h <sub>7</sub>
		E <sub>E</sub>								

Bild 2-7. Anwendung des einfachen Eingangsachsen-Koordinatensystems auf den Stanford-Arm

### 2.3 Vorteile des normalen Eingangsachsen-Koordinatensystems im Vergleich zu anderen Systemen

Das einfache Eingangsachsen-Koordinatensystem ist wegen seiner Einfachheit attraktiv. Die Gl.(2.30) ist aber nur dann so vorteilhaft in ihrer Anwendung wie Gl.(2.26), wenn alle Eingangsachsen entweder parallel oder senkrecht zueinander sind; nur in diesem Fall hat  $\underline{u}_{ir}^{<o>}$  eine Komponente, die ungleich null ist, und zwei Nullkomponenten. Andernfalls ist die Rotationsmatrix  $\text{Rot}(\underline{u}_{ir}^{<o>}, (1-K_i)q_i)$  rechenaufwendiger. So empfiehlt es sich, für allgemeine Fälle das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem zu verwenden.

Bei einem Vergleich des normalen Eingangsachsen-Koordinatensystems mit der Denavit-Hartenberg-Notation ähneln sich  ${}_{i-1}^i\mathbf{H}$  in Gl.(2.1) und  ${}_{i-1}^i\mathbf{H}$  in Gl.(2.26). Wenn das Gelenk  $i$  ein Drehgelenk ist, so sind zur Berechnung von  ${}_{i-1}^i\mathbf{H}$  in Gl.(2.1) wegen der Variablen  $\theta_i$  zwei Multiplikationen mehr durchzuführen als in Gl.(2.26). Im Gegensatz dazu werden bei der Berechnung von  ${}_{i-1}^i\mathbf{H}$  in Gl.(2.26) für das Schubgelenk  $i$  wegen der Variablen  $d_i$  zwei Multiplikationen mehr benötigt als in Gl.(2.1).

Weil bei einer Zweigstruktur ein Gelenk mehr als eine Ausgangsachse hat, eignet sich die Denavit-Hartenberg-Notation nicht gut für diesen Fall.

Somit bietet das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem folgende Vorteile:

- Anschaulichkeit der kinematischen Phänomene,
- leichte Aufstellung,
- geringerer Rechenaufwand und
- Eignung für Zweigstrukturen.

Hinzu kommt, daß es besonders geeignet ist für geschlossene Ketten (s. nächsten Abschnitt) und für das dynamische inverse System (s. Kapitel 4).

Außerdem kann das Parameteridentifikationsverfahren in der Denavit-Hartenberg-Notation [10] auch unmittelbar in dem normalen Eingangsachsen-Koordinatensystem verwendet werden.

## 2.4 Roboter mit geschlossenen Ketten

In einer geschlossenen Kette sind die Bewegungen einiger Gelenke von anderen Gelenken abhängig. Sei der Freiheitsgrad einer geschlossenen Kette  $n$ , dann können sich nur  $n$  Gelenke frei bewegen, und die Verrückungen der anderen Gelenke hängen von diesen  $n$  Gelenken ab. Genauer gesagt, werden die Verrückungen der abhängigen Gelenke von den geometrischen Zwängen bedingt.

Das einfache Eingangsachsen-Koordinatensystem benötigt die vollständige geometrische Information der Nullkonfiguration. In den meisten Fällen ist die Geometrie der Nullkonfiguration einer geschlossenen Kette schwierig zu bestimmen. Man könnte aber die geschlossene Kette zerlegen, um eine virtuelle Nullkonfiguration wie bei einer offenen Kette festzusetzen. Dieses Verfahren ist leider auch umständlich.

Im Gegensatz dazu können bei dem normalen Eingangsachsen-Koordinatensystem die Nullpositionsparameter der abhängigen Gelenke  $\theta'_m$  bzw.  $d'_m$  als unbekannt angenommen werden. In der aktuellen Konfiguration werden außerdem  $\theta_m$  bzw.  $d_m$  statt  $q_m$  durch die Zwangsgleichungen berechnet, da  $q_m$  nicht mehr benötigt werden bei den Koordinatentransformationen. Deshalb ist das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem für geschlossene Ketten günstiger.

Die Bilder 2-8(a) und (b) zeigen den Industrieroboter KUKA/601 CP und seine schematische Darstellung in der



Nullkonfiguration. Obwohl er drei geschlossene Ketten hat, funktioniert er auch wie ein Industrieroboter mit einer einfachen offenen Kette. Die Gelenke, die den Gelenken des gleichwertigen Roboters mit einer offenen Kette äquivalent sind, werden in Bild 2-8(b) mit  $q_I$ ,  $q_{II}$ ,  $q_{III}$  gekennzeichnet. Die Etikettnummern der anderen Gelenke sind beliebig benannt. Die drei geschlossene Ketten sind:

1. I - 1 - 2 - 3 - II - I,
2. I - II - III - 6 - 5 - 4 - I und
3. I - 7 - 8 - 9 - 4 - I.

Beachtung verdient, daß das Glied I vier Ausgangsachsen hat, aber die Koordinatenbasis  $E_I$  durch die Eingangsachsen  $q_I$  und  $q_{II}$  festgelegt ist. Es gibt drei Gelenkgruppen, deren jeweilige Koordinatenbasen an demselben Glied liegen:

Gruppe 1:  $E_{II}$  und  $E_3$ ,

Gruppe 2:  $E_{III}$  und  $E_6$ ,

Gruppe 3:  $E_4$ ,  $E_5$ , und  $E_9$ .

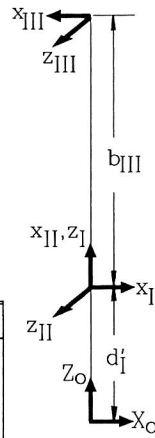
Deshalb ist die Beziehung zwischen zwei zusammengehörigen Koordinatenbasen einer Gruppe unveränderlich.

Da nur die Gelenke I, 2 und 8 einen Antrieb haben, sind nur drei Nullpositionsparameter,  $\theta'_I$ ,  $d'_2$  und  $d'_8$ , erforderlich. Die normalen Eingangsachsen-Koordinatensysteme der gleichwertigen offenen Kette und der drei geschlossenen Ketten werden genauso einfach wie eine offene Kette aufgestellt und in Bild 2-9(a) bzw. (b)-(d) gezeigt.

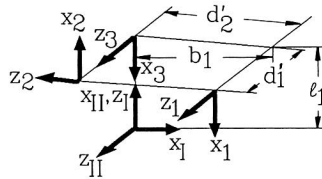
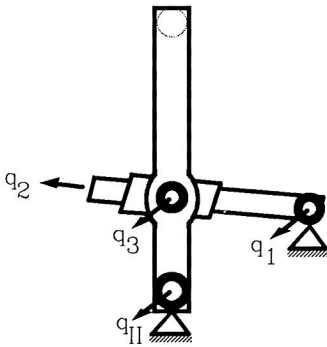
Die drei Zwangsbedingungen der geschlossenen Ketten sind:

1.  ${}^1_H {}^2_H {}^3_H {}^{II}_3H = {}^{II}_I H$ ,

Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	b	d
I (R)	$E_0$	$q_I$	0	0	$d'_I$
II (R)	$E_I$	$q_{II}+90^\circ$	$90^\circ$	0	0
III (R)	$E_{II}$	$q_{III}+90^\circ$	0	$b_{III}$	0
	$E_{III}$				



(a)

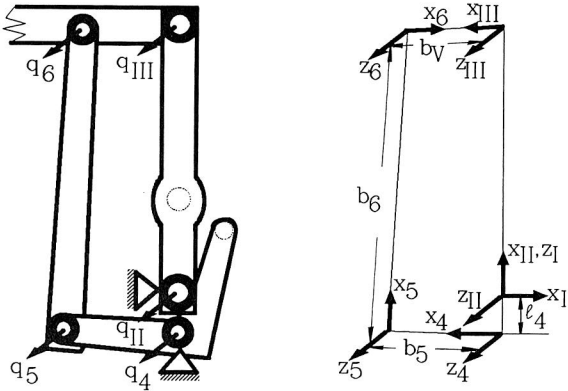


Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	b	d	$\delta$	$\ell$
1 (R)	$E_I$	$\theta_1$	$90^\circ$	$b_1$	$d'_1$	0	$\ell_1$
2 (T)	$E_1$	$180^\circ$	$90^\circ$	0	$d'_2+q_2$	—	—
3 (R)	$E_2$	$\theta_3$	$90^\circ$	0	$-d'_1$	—	—
—	$E_3$	$180^\circ$	0	$b_4$	0	—	—
	$E_{II}$						

(b)

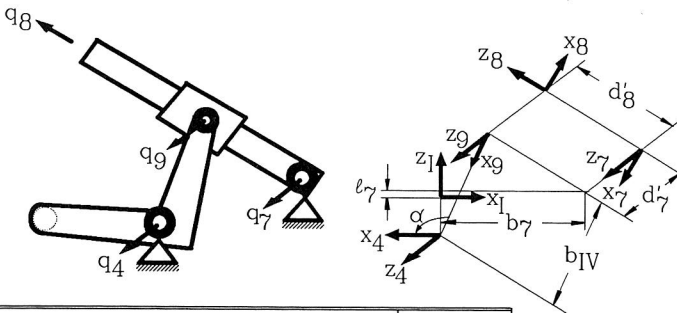
Bild 2-9. Vier normale Eingangsachsen-Koordinatensysteme von KUKA/601 CP





Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	b	d	$\delta$	$l$
4 (R)	$E_I$	$\theta_4$	$90^\circ$	0	0	0	$l_4$
5 (R)	$E_4$	$\theta_5$	0	$b_5$	0	—	—
6 (R)	$E_5$	$\theta_6$	0	$b_6$	0	—	—
—	$E_6$	0	$180^\circ$	$b_V$	0	—	—
—	$E_{III}$						

(c)



Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	b	d	$\delta$	$l$
7 (R)	$E_I$	$\theta_7$	$90^\circ$	$b_7$	$-d_7'$	0	$l_7$
8 (T)	$E_7$	$180^\circ$	$90^\circ$	0	$d_8' + q_8$	—	—
9 (R)	$E_8$	$\theta_9$	$90^\circ$	0	$d_7'$	—	—
—	$E_9$	$180^\circ + \alpha$	0	$b_{IV}$	0	—	—
—	$E_4$						

(d)

Bild 2-9. (fortgesetzt)

$$2. \quad {}^4_H \quad {}^5_H \quad {}^6_H \quad {}^{III}_6H = {}^{III}_I H,$$

$$3. \quad {}^7_H \quad {}^8_H \quad {}^9_H \quad {}^4_H = {}^4_H.$$

In jeder Zwangsbedingung ist nur eine Variable unabhängig; die anderen werden von dieser bestimmt. Bei der ersten Zwangsbedingung treten beispielsweise vier Variablen auf,  $\theta_1$ ,  $d_2$ ,  $\theta_3$  und  $\theta_{II}$ . In der Nullkonfiguration gilt  $\theta_{II} = 90^\circ$  und  $d_2 = d'_2$ ; deshalb kann  $d'_2$  durch diese Zwangsbedingung gelöst werden. In der aktuellen Konfiguration wird dagegen  $\theta_{II}$  statt  $q_{II}$  durch  $q_2$  bestimmt. Analog wird  $\theta_{4r}$  zuerst durch die zweite Zwangsbedingung und  $\theta_{III} = 90^\circ$ , danach wird  $d'_8$  durch die dritte Zwangsbedingung und  $\theta_{4r}$  bestimmt. In der aktuellen Konfiguration wird  $\theta_4$  zunächst durch  $q_8$  bestimmt, dann  $\theta_{III}$  durch  $\theta_4$ . Mit der Kenntnis von  $\theta_I$ ,  $\theta_{II}$ ,  $\theta_{III}$  können die kinematischen Gleichungen dieses Roboters berechnet werden. Zur Lösung der Zwangsbedingungen einer geschlossenen Kette wird auf [66] verwiesen. Ein spezieller Fall mit einem Getriebeviereck als einer geschlossenen Kette wird auch in Kapitel 6 ausführlich behandelt.

### 3 KINEMATISCHE GLEICHUNGEN

#### 3.1 Vorwärtskinematik

Mit Hilfe eines körperfesten Koordinatensystems sind die kinematischen Gleichungen einer Kette ganz leicht herzuleiten. Freilich ist hier nur das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem zu empfehlen. Gemäß dem Ansatz der Gl.(2.17) sind die Orientierung (Gier-Nick-Roll) und die Position des Endeffektors, die häufig mit der auf dem Endeffektor festgelegten Koordinatenbasis  $E_E = \{O_E, \underline{n}, \underline{s}, \underline{a}\}$  dargestellt sind, die 3x3 Submatrix bzw. die vierte Spalte von

$${}^E_H = {}^1_0H \quad {}^2_1H \quad {}^3_2H \quad {}^4_3H \quad {}^5_4H \quad {}^6_5H \quad {}^E_6H. \quad (3.1)$$

Die homogenen Transformationsmatrizen zwischen allen zwei benachbarten Koordinatenbasen des typischen Industrieroboters, des Stanford-Arms, sind in Tabelle 3-1 dargestellt.  ${}^E_H$  wird dann durch Matrixmultiplikation der Gl.(3.1) symbolisch hergeleitet und liegt in Tabelle 3-2 vor.

Die homogenen Transformationsmatrizen führen zu nichtlinearen Gleichungen; jedes Element von  ${}^E_H$  ist eine nichtlineare Funktion von  $\underline{q} = [q_1, \dots, q_6]^T$ . Andererseits wird die Ableitungsbeziehung zwischen den Gelenkkoordinaten und den Kartesischen Weltkoordinaten linear. Dafür wird aber auf die direkte Ableitung von homogenen Transformationsmatrizen verzichtet, weil die Ableitung der Orientierungsmatrix nicht weiterhilft; statt dessen wird die Beziehung zwischen der Geschwindigkeit des Endeffektors und den Gelenkgeschwindigkeiten gesucht, d.h.:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_E^{<0>} \\ \underline{\omega}_E^{<0>} \end{bmatrix} = \underline{J}^{<0>} \dot{\underline{q}} \quad (3.2)$$

Tabelle 3-1. Homogene Transformationsmatrizen des Eingangsachsen-Koordinatensystems des Stanford-Arms

$${}^1_0H = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_1H = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d'_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_2H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_3H = \begin{bmatrix} C_4 & -S_4 & 0 & 0 \\ S_4 & C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_4H = \begin{bmatrix} C_5 & -S_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_5 & C_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^6_5H = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^E_6H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h_7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung:  $C_i \triangleq \cos\theta_i$ ,  $S_i \triangleq \sin\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

mit  $\underline{v_E}$  als Geschwindigkeit,  $\underline{\omega_E}$  als Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors und  $\underline{q}$  als Gelenkkoordinaten, wobei  $\underline{J}$  Jacobi-matrix heißt. Zur leichteren Verständlichkeit werden die Spalten der Jacobimatrix wie folgt gekennzeichnet:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \underline{v_{E1}} & \underline{v_{E2}} & \dots & \underline{v_{E6}} \\ \underline{\omega_{E1}} & \underline{\omega_{E2}} & \dots & \underline{\omega_{E6}} \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

**Tabelle 3-2.** Vorwärtskinematische Gleichungen des Stanford-Arms

$$\begin{array}{l} \underline{E_{OH}} = \begin{bmatrix} C_6(C_5(C_1C_2C_4+S_1S_4)+S_5C_1S_2)+S_6(C_1C_2S_4-S_1C_4) & -S_6(C_5(C_1C_2C_4+S_1S_4)+S_2C_1S_2)+C_6(C_1C_2S_4-S_1C_4) \\ C_6(C_5(S_1C_2C_4-C_1S_4)+S_5S_1S_2)+S_6(S_1C_2S_4+C_1C_4) & -S_6(C_5(S_1C_2C_4-C_1S_4)+S_5S_1S_2)+C_6(S_1C_2S_4+C_1C_4) \\ C_6(C_5S_2C_4-S_5C_2)+S_6S_2S_4 & -S_6(C_5S_2C_4-S_5C_2)+C_6S_2S_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} S_5(C_1C_2C_4+S_1S_4)-C_5C_1S_2 \quad d_3C_1S_2+d_2'S_1 + h_7\{S_5(C_1C_2C_4+S_1S_4)-C_5C_1S_2\} \\ S_5(S_1C_2C_4-C_1S_4)-C_5S_1S_2 \quad d_3S_1S_2-d_2'C_1 + h_7\{S_5(S_1C_2C_4-C_1S_4)-C_5S_1S_2\} \\ S_5S_2C_4 + C_5C_2 \quad -d_3C_2 + h_7\{S_5S_2C_4+C_5C_2\} \\ 0 \quad 1 \end{array} \\ \\ \underline{J}^{<0>} = \begin{bmatrix} -S_1(C_2C_4S_5h_7-S_2C_5h_7+S_2d_3)+C_1(S_4S_5h_7+d_2') & -S_2(C_1C_4S_5h_7)+C_2(-C_1C_5h_7+C_1d_3) & C_1S_2 \\ S_1(S_4S_5h_7+d_2')+C_1(C_2C_4S_5h_7-S_2C_5h_7+S_2d_3) & -S_2(S_1C_4S_5h_7)+C_2(-S_1C_5h_7+S_1d_3) & S_1S_2 \\ 0 & -S_2(C_5h_7-d_3)+C_2C_4S_5h_7 & -C_2 \\ 0 & S_1 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \\ \begin{array}{l} -S_4(C_1S_2S_5h_7)+C_4S_1S_5h_7 \quad S_5C_1S_2h_7+C_5(C_1C_2C_4+S_1S_4)h_7 \quad 0 \\ -S_4(S_1C_2S_5h_7)-C_4C_1S_5h_7 \quad S_5S_1S_2h_7+C_5(S_1C_2C_4-C_1C_4)h_7 \quad 0 \\ -S_4S_2S_5h_7 \quad -S_5C_2h_7 + C_5S_2C_4h_7 \quad 0 \\ C_1S_2 \quad C_1C_2S_4 - S_1C_4 \quad S_5(C_1C_2C_4+S_1S_4)-C_5C_1S_2 \\ S_1S_2 \quad S_1C_2S_4 + C_1C_4 \quad S_5(S_1C_2C_4-C_1C_4)-C_5S_1S_2 \\ -C_2 \quad S_2S_4 \quad S_5S_2C_4 + C_5C_2 \end{array} \end{array}$$

Bemerkung:  $C_i \triangleq \cos\theta_i$ ,  $S_i \triangleq \sin\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

Da die vierte Spalte von  $\underline{E}_H$  der Abstandsvektor vom Ursprung der Gestellkoordinatenbasis  $E_O$  zum Endeffektor ist (gekennzeichnet mit  $\underline{E}_h$ ), ist die Geschwindigkeit des Endeffektors gleich der Zeitableitung von  $\underline{E}_h$ . Davon ausgehend, ist jedes  $\underline{v}_{Ei}^{<0>}$  in Gl.(3.3) die partielle Ableitung von  $\underline{E}_h^{<0>}$  bei  $q_i$ :

$$\underline{v}_{Ei}^{<0>} = \frac{\partial \underline{E}_h^{<0>}}{\partial q_i}. \quad (3.4)$$

Die Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors ist einfach die Summe von allen Gelenkwinkelgeschwindigkeiten:

$$\underline{\omega}_E^{<0>} = \sum_{i=1}^6 (1-K_i) \dot{q}_i \underline{u}_i^{<0>}, \quad (3.5)$$

wobei  $K_i$  und  $\underline{u}_i$  schon in den Gln.(2.10) bzw. (2.11) definiert sind. Daraus ergibt sich:

$$\underline{\omega}_{Ei}^{<0>} = \underline{i}_{OR} [0 \quad 0 \quad (1-K_i)]^T \quad (3.6)$$

für das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem, in dem gilt:  $\underline{u}_i^{<i>} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ . Mit den Gln.(3.4) und (3.6) wurde die Jacobimatrix am Beispiel des Stanford-Arms hergeleitet und in Tabelle 3-2 dargestellt. Es steht außer Frage, daß die in den Gln.(3.4) und (3.6) aufgezeigte Methode nicht die einzige zur Herleitung der Jacobimatrix ist. In der Literatur werden auch andere Methoden [47, 51, 71] beschrieben.

### 3.2 Rückwärtskinematik

Im vorherigen Abschnitt wurde die Vorwärtskinematik von Robotern erörtert. Wenn die Gelenkverrückungen und Gelenkgeschwindigkeiten aller Gelenke angegeben sind, werden die Position, die Orientierung, die lineare Geschwindigkeit sowie die Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors unmittelbar

und eindeutig ohne Schwierigkeiten mit Hilfe der Gln.(3.1) und (3.2) berechnet.

Die Schwierigkeit taucht dann auf, wenn man umgekehrt die Gelenkverrückungen aufgrund der Kenntnis der Kartesischen Weltkoordinaten wissen möchte. Die Rückwärtstransformation ist mehrdeutig, d.h. zu einer vorgegebenen Position und Orientierung des Endeffektors existieren mehrere mögliche Konfigurationen des Roboters. Dazu ist eine explizite Auflösung der Rückwärtskinematik wegen der Nichtlinearität mit derzeitig vorhandenen Verfahren nur bei spezieller Geometrie der kinematischen Kette erreichbar, wie z.B. beim Handgelenk-Roboter, bei dem sich die äußeren drei Gelenke in einem Punkt schneiden. Diese Verfahren sind das Matrixverfahren [19, 20, 51], das geometrische Verfahren [12, 24, 35] und das Schließbedingungsverfahren [76]. Alle hängen in ihrer Anwendung stark von Intuition ab und erfordern viel Mühe und Erfahrung. Eine universelle Methode ist noch nicht erarbeitet worden.

Bei der Rückwärtstransformation der Geschwindigkeiten ist eine explizite Auflösung zwar prinzipiell möglich, aber noch zu umständlich und zu kompliziert für allgemeine Fälle. Die Aufgabe besteht in der Inversion der Jacobimatrix,  $\underline{J}^{<0>}$ . Die numerische Methode, wie z.B. der Gaußsche Algorithmus, ist zwar einfach, aber rechenaufwendig und kann die kinematische Singularität nicht berücksichtigen. Verschiedene Verfahren [12, 24, 48, 51, 71] zur Herleitung einer expliziten Inversmatrix von  $\underline{J}^{<0>}$  wurden für diesen Fall entwickelt. Ein neues systematisches Verfahren wird im folgenden am Beispiel des Stanford-Arms aufgezeigt. Nebenbei wird auch die Singularitätsanalyse durchgeführt.

Die Inversion der Jacobimatrix des Stanford-Arms  $\underline{J}^{<0>}$  ist noch zu kompliziert. Um eine Jacobimatrix, die viele Nullelemente hat, zu erhalten, kann man versuchen, die beiden Seiten der Gl.(3.2) mit  $\underline{0}_R$  vorzumultiplizieren und das Ergebnis:

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_E^{<m>} \\ \underline{\omega}_E^{<m>} \end{bmatrix} = \underline{J}^{<m>} \dot{q} \quad (3.7)$$

mit Hilfe von

$$\begin{bmatrix} \underline{v}_E^{<m>} \\ \underline{\omega}_E^{<m>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{o}_R^{<o>} & \underline{v}_E^{<o>} \\ \underline{o}_R^{<o>} & \underline{\omega}_E^{<o>} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$$\underline{J}^{<m>} = \begin{bmatrix} \underline{o}_R^{<o>} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{o}_R^{<o>} \end{bmatrix} \underline{J}^{<o>} \quad (3.9)$$

zu überprüfen. Die neue Jacobimatrix  $\underline{J}^{<m>}$  läßt sich auch durch die folgenden zwei Gleichungen erfassen:

$$\underline{\omega}_{E1}^{<m>} = \underline{i}_{mR} [0 \quad 0 \quad (1-K_1)]^T, \quad (3.10)$$

$$\underline{v}_{E1}^{<m>} = \frac{\partial (\underline{o}_R^{<o>} \underline{E}_h^{<o>})}{\partial q_i} + \frac{\partial \underline{\omega}_m^{<m>}}{\partial \dot{q}_i} \times (\underline{o}_R^{<o>} \underline{E}_h^{<o>}), \quad (3.11)$$

wobei

$$\underline{\omega}_m^{<m>} = \sum_{j=1}^m \underline{\omega}_{Ej}^{<m>} \dot{q}_j. \quad (3.12)$$

Die Gl.(3.11) entstand aus dem bekannten Ableitungsansatz eines Vektors in einer sich bewegenden Koordinatenbasis, der in jedem Standardtextbuch über Mechanik (z.B. [18] od. Appendix C in [7]) zu finden ist. Bei der Betrachtung dieser Gleichungen sollte die am Mittelglied festgelegte Koordinatenbasis als Bezugssystem gewählt werden, um die Jacobimatrix zu einer spärlicheren Matrix zu transformieren. Dazu ist  $E_3$  wegen seiner geringeren Anzahl an Gliedern in Gl.(3.12) offensichtlich günstiger als  $E_4$ .  $\underline{J}^{<3>}$  ist ganz spärlich wie in Tabelle 3-3 dargestellt.

Der nächste Schritt besteht darin, diese spärliche Matrix



$\underline{J}^{<3>}$  umzukehren. Ziel ist es, eine  $3 \times 3$  Submatrix, die nur Nullelemente hat, zu erhalten. Durch einige lineare algebraische Operationen wird die Gl.(3.7) folgendermaßen umgeformt:

$$\underline{a} = \underline{M} \dot{\underline{q}}' \quad (3.13)$$

mit

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{0} \\ \underline{C} & \underline{D} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Nun ist es relativ einfach, die Inversion von  $\underline{M}$  zu erhalten:

$$\underline{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{A}^{-1} & \underline{0} \\ -\underline{D}^{-1} \underline{C} \underline{A}^{-1} & \underline{D}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Detaillierte Ergebnisse sind in Tabelle 3-3 dargestellt.

Statt der Inversionen der  $3 \times 3$  Matrizen,  $\underline{A}$  und  $\underline{D}$ , kann auch für dieses Beispiel zuerst arithmetisch  $\dot{q}_1$  berechnet (s. die zweite Reihe in Schritt II in Tabelle 3-3), dann dessen Wert zurücks substituiert, anschließend nur bei der Inversion einer  $2 \times 2$  Matrix  $\dot{q}_5$  und  $\dot{q}_6$  erhalten werden (vgl. Schritt II in Tabelle 3-3). Nach der Substitution dieser drei Werte werden die anderen drei Werte einfach errechnet. Dieses ist einfacher und weniger rechenaufwendig.

Da die Matrix  $\underline{D}$  in diesem Beispiel regulär ist, ist die Singularität von  $\underline{J}^{<3>}$  gerade die von  $\underline{A}$ . Die Determinante von  $\underline{A}$  ist  $-S_2 d_3^2 S_5$ . Deshalb sind die kinematischen singulären Punkte des Stanford-Arms:

$$\sin \theta_2 = 0, \quad d_3 = 0, \quad \sin \theta_5 = 0.$$

Das oben beschriebene Verfahren ist zwar nur anhand des Stanford-Arms durchgeführt; es ist aber allgemeingültig. Bei

**Tabelle 3-3.** Verfahren zur Inversion der Jacobimatrix des Stanford-Arms

Schritt I:

$$J^{<3>} = \begin{bmatrix} (d_2' + S_4 S_5 h_7) C_2 & d_3 - C_5 h_7 & 0 & -S_4 S_5 h_7 & C_4 C_5 h_7 & 0 \\ -C_2 C_4 S_5 h_7 - S_2 (d_3 - C_5 h_7) & 0 & 0 & C_4 S_5 h_7 & S_4 C_5 h_7 & 0 \\ (d_2' + S_4 S_5 h_7) S_2 & -C_4 S_5 h_7 & 1 & 0 & S_5 h_7 & 0 \\ S_2 & 0 & 0 & 0 & S_4 & C_4 S_5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -C_4 & S_4 S_5 \\ -C_2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -C_5 \end{bmatrix}$$

Schritt II:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2' C_2 & d_3 C_4 & -d_3 S_4 S_5 & 0 & 0 & 0 \\ -S_2 d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_4 & C_4 S_5 & 0 & 0 & 0 \\ (d_2' + S_4 S_5 h_7) S_2 & S_5 h_7 & 0 & -C_4 S_5 h_7 & 1 & 0 \\ 0 & -C_4 & S_4 S_5 & 1 & 0 & 0 \\ -C_2 & 0 & -C_5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}$$

$$a_1 \triangle (\underline{v_E^{<3>}})_x - (d_3 - C_5 h_7) (\underline{\omega_E^{<3>}})_y + (S_4 S_5 h_7) (\underline{\omega_E^{<3>}})_z$$

$$a_2 \triangle (\underline{v_E^{<3>}})_y - (C_5 h_7) (\underline{\omega_E^{<3>}})_x - (C_4 S_5 h_7) (\underline{\omega_E^{<3>}})_z$$

$$a_3 \triangle (\underline{\omega_E^{<3>}})_x$$

$$a_4 \triangle (\underline{v_E^{<3>}})_z$$

$$a_5 \triangle (\underline{\omega_E^{<3>}})_y$$

$$a_6 \triangle (\underline{\omega_E^{<3>}})_z$$

Schritt III:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & d_2' C_2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_2' S_2 d_3 & 1 & -S_4 S_5 h_7 & C_4 S_5 h_7 & 0 \\ -S_4 C_5 / S_5 & -(d_2' C_2 S_4 C_5 - (C_2 S_5 - S_2 C_4 C_5) d_3) / S_5 & 0 & C_4 C_5 / S_5 & 0 & 1 \\ C_4 & d_2' C_2 C_4 + S_2 d_3 S_4 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ -S_4 / S_5 & -(d_2' C_2 S_4 - S_2 C_4 d_3) / S_5 & 0 & C_4 / S_5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a_1}{d_3} \\ \frac{a_2}{S_2 d_3^2} \\ (\underline{v_E^{<3>}})_z \\ \underline{\omega_E^{<3>}} \end{bmatrix}$$

Bemerkung:  $C_i \triangle \cos \theta_i$ ,  $S_i \triangle \sin \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

allgemeinen Fällen ist es jedoch kaum möglich, eine  $3 \times 3$  Nullmatrix zu erhalten, und weil die Inversmatrix so kompliziert ist, ist auch die Singularitätsanalyse schwierig. Glücklicherweise ist die Inversion der Jacobimatrix für Handgelenk-Roboter immer genauso leicht wie für den Stanford-Arm.

### 3.3 Eigenschaften der kinematischen Singularität

Beindet sich der Stanford-Arm in der Position  $\sin\theta_2 = 0$  oder  $d_3 = 0$ , bleibt  $a_2$  (s. Schritt II in Tabelle 3-3) immer null. Ist  $\sin\theta_5 = 0$ , so sind  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  linear abhängig. Jeweils eines davon wird von den beiden anderen bestimmt. In jedem Fall geht ein Freiheitsgrad des Roboters verloren; dies wird Degeneration genannt. Ein Roboter kann sich nicht in der degenerierten Richtung bewegen, wenn er sich in einem singulären Punkt befindet. Ist z.B.  $d_3 = 0$ , bewirken die Gelenkgeschwindigkeiten, daß die Komponente der Geschwindigkeit des Endeffektors in Richtung von  $a_2$  gleich null ist, d.h. der Roboter kann keinen beliebigen Wert von  $a_2$  erreichen.

Obwohl ein Roboter in der Nähe der Singularität noch sechs Freiheitsgrade hat, benötigt er große Gelenkverrückungen für eine geringfügige Verrückung in der degenerierten Richtung. Da die Gelenkgeschwindigkeiten tatsächlich beschränkt sind, wird der Roboter die Geschwindigkeit in der degenerierten Richtung mehr oder weniger verlieren. Zur Veranschaulichung wird ein zweiachsiger Roboter (Bild 3-1) als Beispiel herangezogen. Wenn beide Glieder in einer Linie stehen, tritt die Singularität ein, und der Roboter erzeugt nur eine Geschwindigkeit senkrecht zu dieser Linie, aber keine entlang dieser Linie. Eine kleine virtuelle Verrückung in der Nähe der singulären Konfiguration entlang dem zweiten Glied (d.h. der degenerierten Richtung) benötigt viel größere virtuelle Gelenkverrückungen.

Bei dem Stanford-Arm, so wie bei allen Handgelenk-Robotern, beeinflussen die singulären Punkte von  $\sin\theta_2 = 0$  und  $d_3 = 0$  die Positionsgenauigkeit, während die Orientierungsabweichung von  $\sin\theta_5 = 0$  vergrößert werden kann. Aboaf und Paul [1] schlugen eine Strategie für die Geschwindigkeitssteuerung (resolved rate control [75]) vor, damit die Positionsgenauigkeit immer gewährleistet wird. Da die Orientierung des Endeffektors bei Fertigungsaufgaben nicht so wichtig ist, wird die minimale Orientierungsabweichung in Kauf genommen.

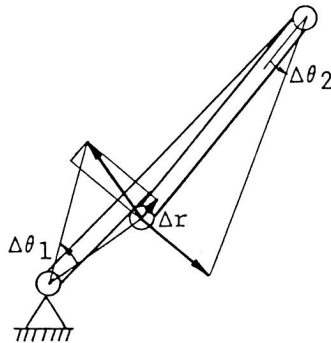


Bild 3-1. Bewegung in der Nähe der Singularität bei einem zweiachsigen Roboter

Um auf diese Strategie einzugehen, wird zunächst die Singularität des kugelförmigen Handgelenkgetriebes betrachtet. Bild 3-2 zeigt das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem des kugelförmigen Handgelenkgetriebes in der Konfiguration, bei der gilt:  $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$ . Der gestrichelte Kreis zeigt die Laufbahn von  $\underline{z}_6$ , wenn sich  $\underline{z}_5$  dreht. Wenn  $\theta_5 = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  ist, d.h. wenn  $\sin\theta_5 = 0$ , liegen die drei Teilgelenke  $\underline{z}_4$ ,  $\underline{z}_5$  und  $\underline{z}_6$  in derselben Ebene. Offensichtlich bewirken die drei Teilgelenke momentan die Winkelgeschwindigkeit nur in der Ebene, jedoch keine Komponente um die Achse  $\underline{z}_5$ . Es sei darauf hingewiesen, daß die Orientierungssingularität im gesamten Arbeitsraum

bezüglich der Position des Endeffektors eintreten kann, denn die Singularitätsanalyse des Handgelenkgetriebes bezog sich auf die Achse  $\underline{z}_4$ , und  $\underline{z}_4$  ändert sich mit den ersten drei Gelenken. Im Gegensatz dazu werden die singulären Punkte der Position bei dem Entwurf des Arbeitsraums leicht vermieden. Zur weiteren Erörterung der Singularität des kugelförmigen Handgelenkgetriebes wird auf [52] verwiesen.

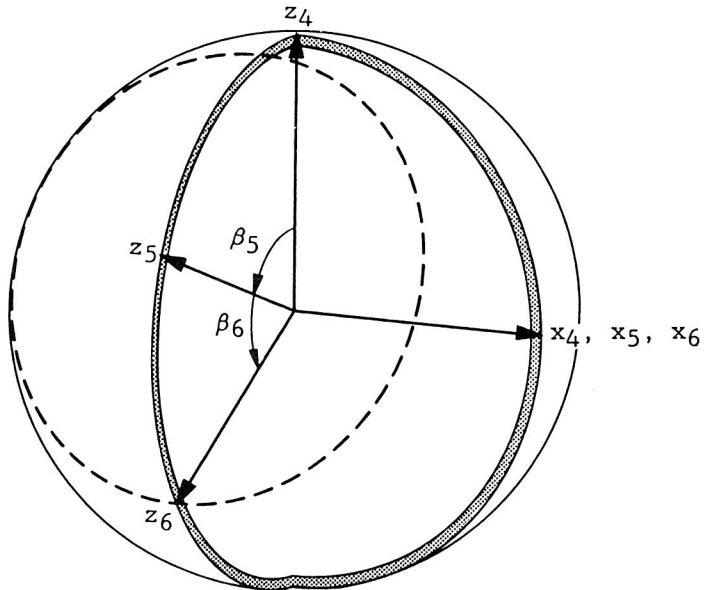


Bild 3-2. Konfiguration des kugelförmigen Handgelenks bei  $\theta_4 = \theta_5 = \theta_6 = 0^\circ$

Es wird davon ausgegangen, daß die Achse  $\underline{x}_5$  eine degenerierte Achse ist. Die Gewährleistung der Winkelgeschwindigkeit um  $\underline{x}_5$  ist in der Nähe der Orientierungssingularität nicht mehr möglich, deshalb wird sie vernachlässigt. Zu diesem Zweck wird zuerst die Geschwindigkeitsbeziehung der Gl.(3.7) wie folgt umformuliert:



$$S_5 \dot{q}_4 = (\omega_E^{<5>})_x - (S_2 C_4 C_5 - C_2 C_5) \dot{q}_1 - (S_4 C_5) \dot{q}_2 \quad (3.18)$$

hinzuweisen. Der Betrag auf der rechten Seite der letzten Gleichung ist die vom Handgelenkgetriebe erzeugte Winkel-

Tabelle 3-4. Matrix  $\underline{J}^S$  und deren Inversionsverfahren

Schritt I:

$$\underline{J}^S = \begin{bmatrix} (d_2' + S_4 S_5 h_7) C_2 & d_3 - C_5 h_7 & 0 & -S_4 S_5 h_7 & C_4 C_5 h_7 & 0 \\ -C_2 C_4 S_5 h_7 - S_2 (d_3 - C_5 h_7) & 0 & 0 & C_4 S_5 h_7 & S_4 C_5 h_7 & 0 \\ (d_2' + S_4 S_5 h_7) S_2 & -C_4 S_5 h_7 & 1 & 0 & S_5 h_7 & 0 \\ S_2 C_4 C_5 - C_2 S_5 & S_4 C_5 & 0 & S_5 & 0 & 0 \\ -S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5 & -S_4 S_5 & 0 & C_5 & 0 & -1 \\ S_2 S_4 & -C_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Schritt II:

$$[a_1 \ a_2 \ a_3]^T \Delta \omega_E^{<3>}, \quad [a_4 \ a_5 \ a_6]^T \Delta \omega_E^{<5>} \\ \begin{bmatrix} a_1 + (S_4 h_7) a_4 - (C_4 C_5 h_7) a_6 \\ a_2 - (C_4 h_7) a_4 - (S_4 C_5 h_7) a_6 \\ a_3 - (S_5 h_7) a_6 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2' C_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S_2 d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2' S_2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 C_4 C_5 - C_2 S_5 & S_4 C_5 & 0 & S_5 & 0 & 0 \\ -S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5 & -S_4 S_5 & 0 & C_5 & 0 & -1 \\ S_2 S_4 & -C_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Schritt III:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= -\{a_2 - (C_4 h_7) a_4 - (S_4 C_5 h_7) a_6\} / (S_2 d_3) \\ \dot{q}_2 &= \{a_1 + (S_4 h_7) a_4 - (C_4 C_5 h_7) a_6 - (d_2' C_2) \dot{q}_1\} / d_3 \\ \dot{q}_3 &= a_3 - (S_5 h_7) a_6 - (d_2' S_2) \dot{q}_1 \\ \dot{q}_4 &= \{a_4 - (S_2 C_4 C_5 - C_2 S_5) \dot{q}_1 - (S_4 C_5) \dot{q}_2\} / S_5 \\ \dot{q}_5 &= a_5 - (S_2 S_4) \dot{q}_1 + C_4 \dot{q}_2 \\ \dot{q}_6 &= -a_5 - (S_2 C_4 S_5 + C_2 C_5) \dot{q}_1 - (S_4 S_5) \dot{q}_2 + C_5 \dot{q}_4 \end{aligned}$$

Bemerkung:  $C_i \Delta \cos \theta_i$ ,  $S_i \Delta \sin \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

geschwindigkeit um die Achse  $\underline{x}_5$  und hängt allein von  $\dot{q}_4$  ab. Dieses kann auch durch die Geometrie erklärt werden. Bild 3-3 zeigt die Sicht der  $x_4$ - $z_4$ -Ebene von Bild 3-2 mit  $\beta_5 = \beta_6 = 90^\circ$ . Die Winkelgeschwindigkeit um  $\underline{x}_5$  ist der Produktbetrag von  $\dot{q}_4$  und  $\sin\theta_5$ .  $\dot{q}_6$  trägt dazu nichts bei.

Zurück zum Aboaf-Paulschen Vorschlag. Dieser Vorschlag wird zur Anpassung von  $\underline{J}^S$  im folgenden Algorithmus umformuliert:

Schritt 1:  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_6$  werden gemäß Tabelle 3-4 berechnet.

Schritt 2: Wenn der berechnete Wert von  $\dot{q}_4$  größer ist als der maximale Wert, d.h. wenn:

$$|\dot{q}_4| > \dot{q}_{4\max} > 0,$$

dann wird

$$\dot{q}_4 = \text{sign}(\dot{q}_4) \dot{q}_{4\max}$$

eingesetzt, wobei  $\text{sign}(\dot{q}_4) = +1$ , wenn  $\dot{q}_4 \geq 0$ , oder  $\text{sign}(\dot{q}_4) = -1$ , wenn  $\dot{q}_4 < 0$ . Andernfalls wird dieser Algorithmus beendet.

Schritt 3: Nach der Substitution von  $\dot{q}_4$  und unter Auslassung von  $a_4$  in Tabelle 3-4 gilt:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -S_4 & S_5 & h_7 \\ C_4 & S_5 & h_7 \\ 0 \\ C_5 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_4 = \underline{C} \underline{J}^S \underline{C}^T \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

mit



$$\underline{C} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Schritt 4:  $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_5, \dot{q}_6$  werden durch die Inversion von  $\underline{C} \underline{J}^s \underline{C}^T$  erneut berechnet (s. Tabelle 3-5).

**Tabelle 3-5.** Inversion der Jacobimatrix unter Vernachlässigung der Komponente der Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors entlang  $\underline{x}_5$

Schritt I:

$$[a_1 \ a_2 \ a_3]^T \Delta \underline{v}_E^{<3>}, \quad [a_4 \ a_5 \ a_6]^T \Delta \underline{w}_E^{<5>}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} a_1 + S_4 S_5 h_7 \dot{q}_4 \\ a_2 - C_4 S_5 h_7 \dot{q}_4 \\ a_3 - 0 \\ a_5 - C_5 \dot{q}_4 \\ a_6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_2' + S_4 S_5 h_7) C_2 & d_3 - C_5 h_7 & 0 & C_4 C_5 h_7 & 0 \\ -C_2 C_4 S_5 h_7 - S_2 (d_3 - C_5 h_7) & 0 & 0 & S_4 C_5 h_7 & 0 \\ (d_2' + S_4 S_5 h_7) S_2 & -C_4 S_5 h_7 & 1 & S_5 h_7 & 0 \\ -S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5 & -S_4 S_5 & 0 & 0 & -1 \\ S_2 S_4 & -C_4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Schritt II:

$$\begin{bmatrix} b_1 - (C_4 C_5 h_7) b_6 \\ b_2 - (S_4 C_5 h_7) b_6 \\ b_3 - (S_5 h_7) b_6 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_2' + S_4 S_5 h_7) C_2 - S_2 S_4 C_4 C_5 h_7 & d_3 - S_4^2 C_5 h_7 & 0 & 0 & 0 \\ -C_2 C_4 S_5 h_7 - S_2 (d_3 - C_4^2 C_5 h_7) & C_4 S_4 C_5 h_7 & 0 & 0 & 0 \\ d_2' S_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5 & -S_4 S_5 & 0 & 0 & -1 \\ S_2 S_4 & -C_4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_5 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix}$$

Schritt III:

$$\begin{bmatrix} b_1 - (C_4 C_5 h_7) b_6 \\ b_2 - (S_4 C_5 h_7) b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (d_2' + S_4 S_5 h_7) C_2 - S_2 S_4 C_4 C_5 h_7 & d_3 - S_4^2 C_5 h_7 \\ -C_2 C_4 S_5 h_7 - S_2 (d_3 - C_4^2 C_5 h_7) & C_4 S_4 C_5 h_7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{q}_1, \dot{q}_2$$

$$\dot{q}_3 = b_3 - (S_5 h_7) b_6 - (d_2' S_2) \dot{q}_1$$

$$\dot{q}_5 = b_5 - (S_2 S_4) \dot{q}_1 + C_4 \dot{q}_2$$

$$\dot{q}_6 = -b_5 - (S_2 C_4 S_5 + C_2 C_5) \dot{q}_1 - (S_4 S_5) \dot{q}_2$$

Bemerkung:  $C_i \Delta \cos \theta_i$ ,  $S_i \Delta \sin \theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ .

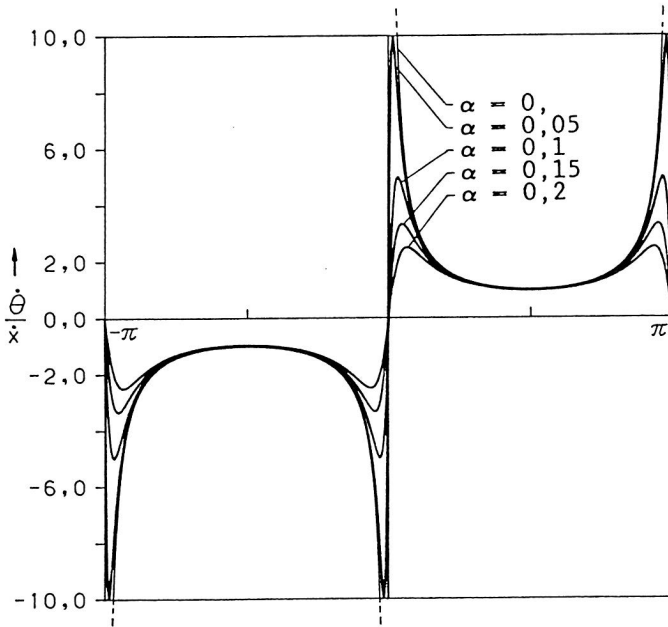


Bild 3-4. Lösung der modifizierten kleinsten Quadrate für  $\sin \theta \dot{\theta} = \dot{x}$

Obwohl dieser Algorithmus die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors mit Ausnahme der Komponente  $(\omega_{E,5}^{<5>})_x$  gewährleistet, hat er den Nachteil, daß sich die Gelenke 4 und 6 noch mit der maximalen Geschwindigkeit bewegen, wenn der Roboter ruhig im singulären Punkt  $\theta_5 = 0^\circ$  oder  $180^\circ$  bleibt. Zur Überwindung dieses Problems wird eine Modifikation mit der Methode der modifizierten kleinsten Quadrate (damped least-squares) eingeführt. Für  $\sin \theta \dot{\theta} = \dot{x}$  ist die Lösung der modifizierten kleinsten Quadrate [73]

$$\dot{\theta}_\alpha = \frac{\sin \theta}{\sin^2 \theta + \alpha^2} \dot{x},$$

die auch in Bild 3-4 graphisch dargestellt ist.

Die Lösung von  $\dot{q}_4$  in Tabelle 3-4 wird dann ersetzt durch:

$$\dot{q}_4 = \{a_4 - (S_2 C_4 C_5 - C_2 S_5) \dot{q}_1 - (S_4 C_5) \dot{q}_2\} \frac{\sin\theta_5}{\sin^2\theta_5 + \alpha^2}.$$

Gleichzeitig wird Schritt 2 in dem oben erwähnten Algorithmus so modifiziert, daß der Algorithmus nicht in Schritt 2 beendet wird, falls der Wert von  $\dot{q}_4$  auch nicht größer als der maximalen Wert ist.

Zum Vergleich der verschiedenen Verfahren wird eine Simulation durchgeführt. Der Stanford-Arm steht am Anfang in der Konfiguration:

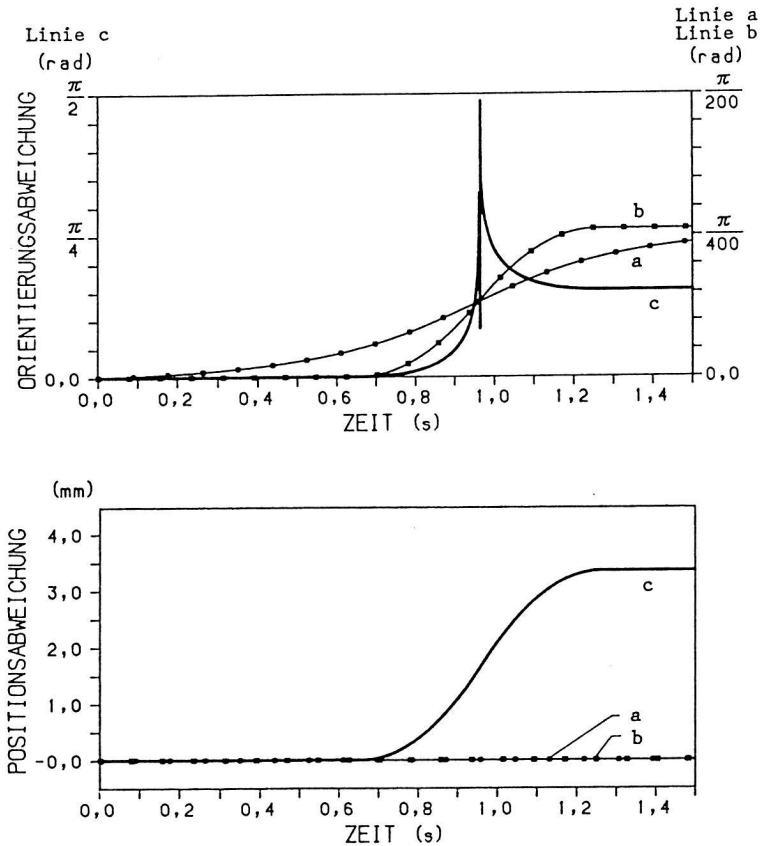
$$q_1 = q_4 = q_6 = 0,0\text{rad}, \quad q_2 = -0,294\text{rad}, \quad q_3 = -0,2025\text{m}, \\ q_5 = -1,344\text{rad}.$$

Die Sollbahn des Endeffektors ist, daß der Roboter sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\underline{\omega}_E^{<0>} = [-0,01 \quad -0,15 \quad 0]^T$  (rad/s) bewegt, d.h. nur die Orientierung des Endeffektors soll sich ändern. Und  $\dot{q}_{4\text{max}} = 0,30\text{rad/s}$ .

Das Bild 3-5 zeigt die Positions- und Orientierungsabweichungen bei der Geschwindigkeitssteuerung [75] mit drei verschiedenen Verfahren: dem Verfahren mit der Inversion der Jacobimatrix, dem Aboaf-Paulschen Vorschlag und dem vorliegenden modifizierten Verfahren mit  $\alpha = 0,1$ . Weil die Geschwindigkeitssteuerung keine Rückführung hat und das gesamte System ein offenes Kreis ist, wird jeder Steuerungsfehler in einem Zeitpunkt auch ein permanenter Schleppfehler; deshalb sind die Abweichungen in jedem Zeitpunkt die Ansammlungen der jeweiligen Fehler von Anfang an bis zu diesem Zeitpunkt.

Bei Vernachlässigung der Komponente  $(\underline{\omega}_E^{<5>})_x$ , d.h. dem Aboaf-

Paulschen Vorschlag und dem modifizierten Verfahren, wird die Positionsgenauigkeit wie erwartet gewährleistet; zusätzlich wird die Orientierungsgenauigkeit auch besser als in dem Verfahren mit der Inversion der Jacobimatrix, obwohl sie auch nicht vernachlässigbar gering ist.



Linie a: modifiziertes Verfahren

Linie b: Aboaf-Paulscher Vorschlag

Linie c: Verfahren mit der Inversion der Jacobimatrix

Bild 3-5. Positions- und Orientierungsabweichungen bei der Geschwindigkeitssteuerung für eine konstante Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors

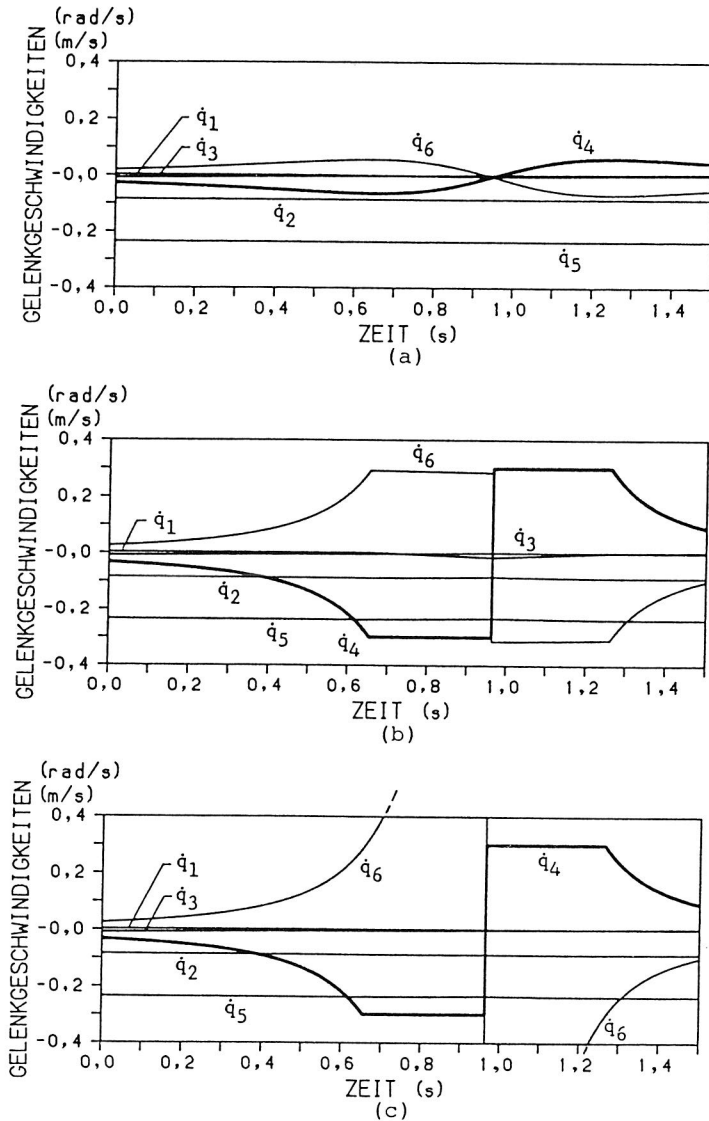


Bild 3-6. Gelenkgeschwindigkeiten bei der Geschwindigkeitssteuerung für eine konstante Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors: (a) modifiziertes Verfahren (b) Aboaf-Paulscher Vorschlag (c) Verfahren mit der Inversion der Jacobimatrix

Aus Bild 3-6 wird ein Merkmal abgelesen, nämlich daß die Verläufe der Gelenkgeschwindigkeiten des modifizierten Verfahrens immer kontinuierlich sind, was sein Vorteil gegenüber den beiden anderen Verfahren ist.

#### **4 DYNAMISCHE MODELLE VON INDUSTRIEROBOTERN MIT EINER EINFACHEN OFFENEN KETTE**

Zur Aufstellung der dynamischen Gleichungen von Industrierobotern mit einer einfachen offenen Kette gibt es hauptsächlich zwei Methoden: die Lagrangeschen Gleichungen und die Newton-Eulerschen Gleichungen. Da die Rechenzeit das Verhalten der Abtastregelung beeinflusst, haben sich viele Wissenschaftler [23, 28, 30, 37, 42, 45, 46, 69] um eine weniger rechenaufwendige Formulierung des dynamischen inversen Systems bemüht, die eine Voraussetzung zur Realisierung der Rückführungsentkopplung ist (s. Kapitel 1).

Hollerbach [23] verglich die Komplexität der verschiedenen dynamischen Formulierungen und kam zu dem Schluß, daß die von Luh et al. [42] hergeleitete rekursive Newton-Eulersche Formulierung günstiger als die Lagrangeschen Formulierungen sei.

Die Leistungsfähigkeit der rekursiven Newton-Eulerschen Formulierung hat nach Meinung Silvers [56] zwei Gründe: die rekursive Rechenstruktur und die mathematische Darstellung der Rotationstransformation. Silver [56] hat auch bewiesen, daß die gemäß der Lagrangeschen Gleichungen mit den Winkelgeschwindigkeitsvektoren statt der Homogenmatrix hergeleitete dynamische Formulierung im Grunde genommen äquivalent zur rekursiven Newton-Eulerschen ist. Gleichwohl wurde ein weiterer Einflußfaktor auf den Rechenaufwand der Dynamik in der Literatur kaum beachtet: das körperfeste Koordinatensystem.

Vukobratovic und Kircanski [69] entwickelten statt dessen die numerisch-symbolische Methode, die mit einer rechnerunterstützten Software nach Ersatz der bekannten Parameter durch Zahlen die symbolischen dynamischen Gleichungen aufstellt, danach die Gleichungen zur Suboptimierung des Rechenaufwands umformuliert. Diese Methode wurde zum ersten Mal für einige Roboter an einem Mikroprozessor (INTEL

8086/8087, 5MHz Takt) implementiert. Die Rechenzeit für den Stanford-Arm beträgt 33,3ms, die damit das mechanische Abtastzeitkriterium noch bei weitem überschreitet.

Einige Wissenschaftler [30, 40, 46] berücksichtigten auch die bekannten Parameter mit dem Wert von Null bzw. Eins und die wiederholten Berechnungen der rekursiven Newton-Eulerschen Formulierung, um mit einer Software unter Eliminierung solcher redundanter Rechenoperationen die sogenannten kundenangepaßten Algorithmen für einige Industrieroboter zu erstellen. Solche Algorithmen sind abhängig vom Typ des Roboters, also nicht flexibel. Beim Austausch eines mechanischen Teiles verändern sich auch einige Parameter mit Null und Eins, d.h. es muß ein neuer kundenangepaßter Algorithmus erstellt werden. Es ist noch umständlicher, bei der Implementierung ein eigenes Mikroprozessorenprogramm nach dem jeweilig erstellten kundenangepaßten Algorithmus aufzubauen. Aus diesen Gründen sind fast alle vorgeschlagenen kundenangepaßten Algorithmen in der Praxis noch nicht realisiert, außer dem von Kasahara und Narita [27] vorgelegten parallelen Multimikroprozessorenalgorithmus. Dieser ist an einem Multimikroprozessorsystem realisiert, wegen der großen Mühe aber nur an einem System, das eine ähnliche Rechenstruktur wie ein Roboter hat, jedoch nicht an einem echten Roboter.

Im Gegensatz dazu besteht die vorliegende Aufgabe darin, eine flexible und leistungsfähige Mikroprozessorensoftware des dynamischen inversen Systems für alle modernen Industrieroboter zu entwickeln, die auch das Abtastzeitkriterium befriedigt.

#### 4.1 Rekursive Newton-Eulersche Formulierung zum dynamischen inversen System

Luh, Walker und Paul [42] verwendeten die Denavit-Hartenberg-Notation und entwickelten die rekursive Newton-



Eulersche Formulierung, die in dem Ablaufdiagramm in Bild 4-1 erneut dargestellt ist.

Diese Formulierung wird verändert auf der Basis des normalen Eingangsachsen-Koordinatensystems hergeleitet. Die Herleitung ähnelt der von Luh et al., dazu wird auf [37] verwiesen. Das Ergebnis ist in Bild 4-2, auch in einem Ablaufdiagramm, dargestellt.

Beide Algorithmen beinhalten zwei rekursive Rechengänge: vorwärts und rückwärts. Auf den ersten Blick scheinen die Strukturen der beiden rekursiven Rückwärtsrechengänge fast gleich, bei dem rekursiven Vorwärtsrechengang aber ist der auf dem normalen Eingangsachsen-Koordinatensystem basierende Algorithmus etwas einfacher zu rechnen. Weil das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem der physikalischen Bedeutung der kinematischen Bewegung entspricht, veranschaulicht der auf ihm basierende Algorithmus die redundanten Rechenoperationen mit Null und Eins. So wird die Implementierung unter der Berücksichtigung des redundanten Rechnens erleichtert.

#### 4.2 Anzahl der arithmetischen Operationen der Algorithmen

Bei der Betrachtung moderner Industrieroboter kann ein heutiger Industrieroboter wie folgt definiert werden:

- Seine Gelenke sind zueinander senkrecht oder parallel, d.h. die Transformationsparameter  $\theta'$  und  $\beta$  (s. Abschnitte 2.1.1 und 2.2.2) sind Vielfache von  $90^\circ$ .
- Seine Abstandsvektoren von den Ursprüngen der körperfesten Koordinatenbasen zu den jeweiligen Schwerpunkten ( $\underline{c}_i$ ) haben wegen der geometrischen Symmetrie maximal nur zwei Komponenten statt drei, die ungleich null sind.
- Seine Hauptträgheitsachsen richten sich nach den

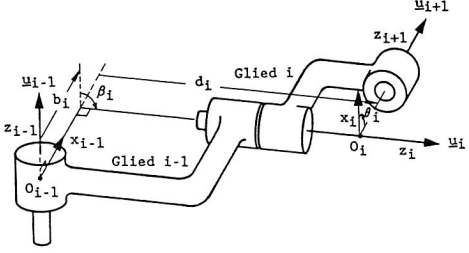
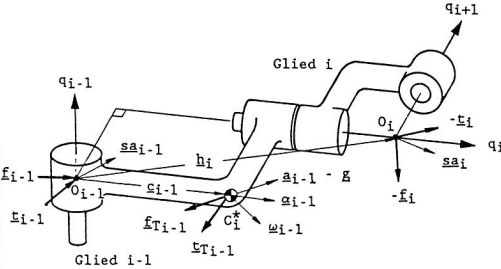
Bekannte Parameter:	NORMALES EINGANGSACHSEN-KOORDINATENSYSTEM
<p><math>K_i = \begin{cases} 0, &amp; \text{für Drehgelenk } i; \\ 1, &amp; \text{für Schubgelenk } i. \end{cases}</math></p> <p><math>m_i</math> : Masse des Gelenks <math>i</math>.</p> <p><math>J_i^{&lt;i&gt;}</math> : Auf die Orientierung von <math>[\bar{x}_i \ Y_i \ Z_i]</math> bezogener, im Schwerpunkt liegender Trägheitstensor.</p> <p><math>c_i^{&lt;i&gt;}</math> : Abstand vom Ursprung der <math>i</math>-ten körperfesten Koordinatenbasis, <math>[\bar{x}_i \ Y_i \ Z_i]</math>, zum Schwerpunkt des Gelenks <math>i</math>.</p>	<p>Kinematische Parameter:</p> 
<p><math>\bar{h}_i^{&lt;i-1&gt;} = \begin{bmatrix} b_i \\ -d_i \sin \beta_i \\ d_i \cos \beta_i \end{bmatrix},</math></p> <p><math>i = 1, \dots, n-1</math> mit <math>b_i, d_i, \beta_i</math> als kinematische Parameter.</p> <p><math>\bar{h}_{n+1}^{&lt;n&gt;}</math> : Abstand vom Ursprung <math>O_n</math> zum Endeffektor.</p>	<p>Dynamische Parameter:</p> 
<p><math>\bar{s}a_o^{&lt;o&gt;}</math> : Beschleunigung des Ursprungs <math>O_o</math>.</p> <p><math>\bar{g}^{&lt;o&gt;}</math> : Erdbeschleunigung.</p> <p><math>\bar{\omega}_o^{&lt;o&gt;} = \underline{0}</math>, Winkelgeschwindigkeit des Gestells.</p> <p><math>\bar{\alpha}_o^{&lt;o&gt;} = \underline{0}</math>, Winkelbeschleunigung des Gestells.</p> <p>Es sei : <math>\bar{s}a_o^{&lt;o&gt;} = \bar{s}a_o^{&lt;o&gt;} - \bar{g}^{&lt;o&gt;}</math></p>	<p><math>q_{i-1}</math> : Verrückung des Gelenks <math>i-1</math></p> <p><math>\omega_{i-1}</math> : Winkelgeschwindigkeit des Gelenks <math>i-1</math></p> <p><math>\alpha_{i-1}</math> : Winkelbeschleunigung des Gelenks <math>i-1</math></p> <p><math>\bar{a}_{i-1}</math> : Beschleunigung am Schwerpunkt <math>C_{i-1}^*</math></p> <p><math>\bar{s}a_{i-1}</math> : Beschleunigung am Ursprung <math>O_{i-1}</math></p> <p><math>\bar{f}_{i-1}</math> : äquivalente Reaktionskraft am Ursprung <math>O_{i-1}</math></p> <p><math>\bar{\tau}_{i-1}</math> : äquivalentes Reaktionsmoment am Ursprung <math>O_{i-1}</math></p>
<p>Bemerkung :</p> <p>Das Rechtsüberzeichen "<math>&lt;i&gt;</math>" bedeutet die auf die Koordinatenbasis <math>[\bar{x}_i \ Y_i \ Z_i]</math> bezogene Darstellung.</p>	<p><math>\bar{f}_{Ti-1}</math> : Trägheitskraft des Gelenks <math>i-1</math></p> <p><math>\bar{\tau}_{Ti-1}</math> : Trägheitsmoment des Gelenks <math>i-1</math></p> <p><math>\bar{f}_{i-1}</math> : Antriebskraft bzw. -moment</p> <p>Bemerkung:</p> <p><math>-\bar{f}_{n+1}^{&lt;n&gt;} = \bar{f}_E^{&lt;n&gt;}</math> : Taktilskraft am Endeffektor</p> <p><math>-\bar{\tau}_{n+1}^{&lt;n&gt;} = \bar{\tau}_E^{&lt;n&gt;}</math> : Taktilmoment am Endeffektor</p>

Bild 4-1. Ablaufdiagramm der rekursiven Newton-Eulerschen Formulierung von Luh, Walker und Paul

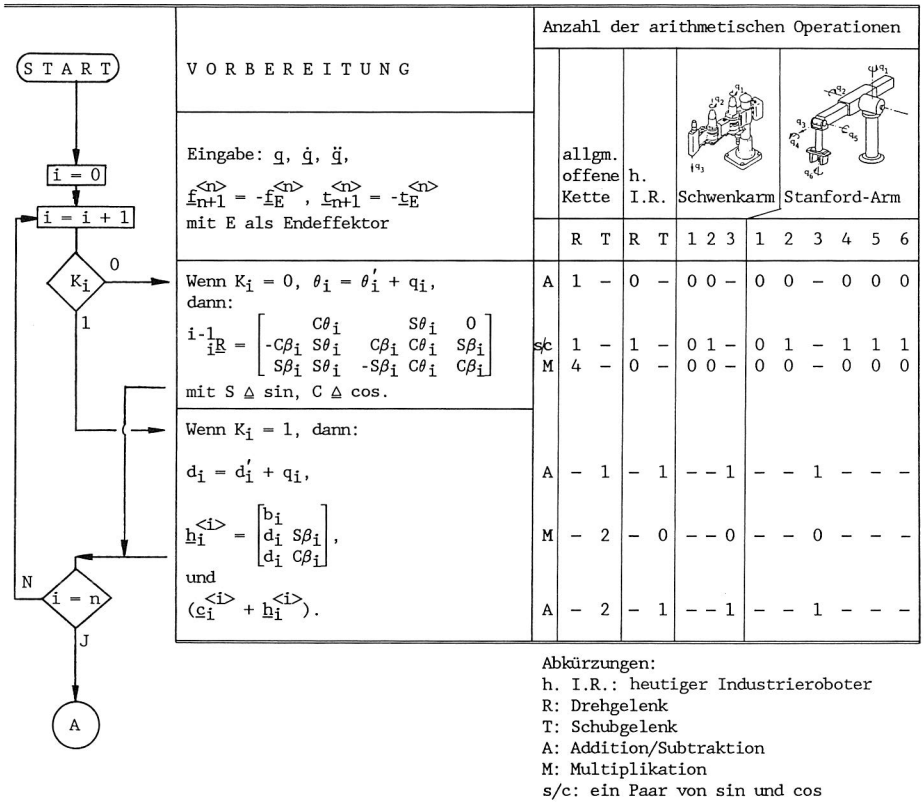


Bild 4-1. (fortgesetzt)

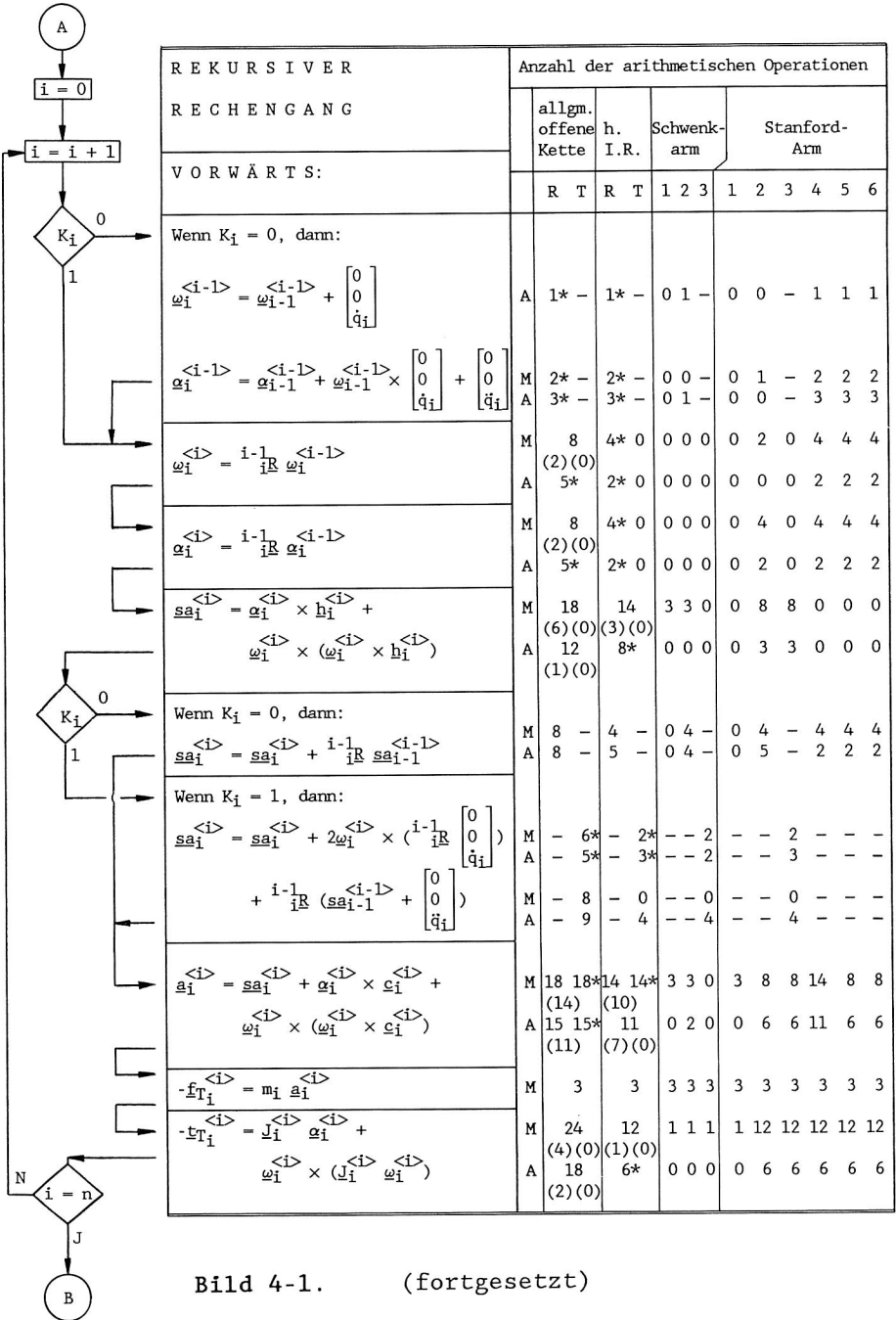
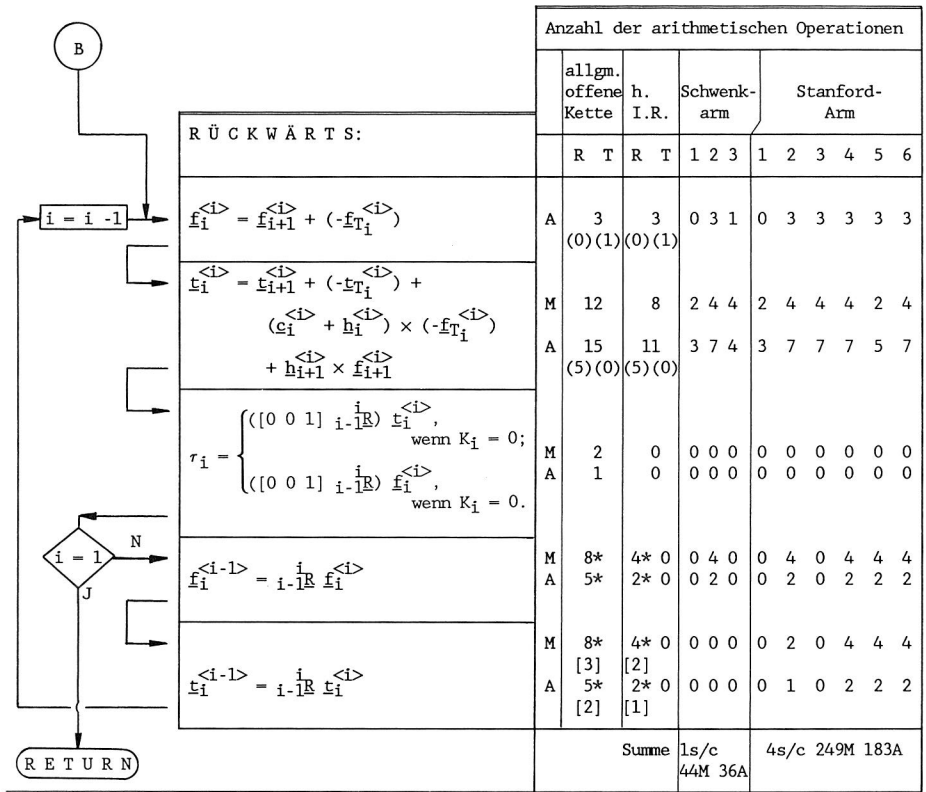


Bild 4-1. (fortgesetzt)



Bemerkung:

\*: Die Anzahl der Operationen für  $i=1$  ist null.

( ): Die Zahl darin ist für  $i=1$ .

[ ]: Die Zahl darin ist für  $i=2$ .

Bild 4-1. (fortgesetzt)

Bekannte Parameter:

$$K_i = \begin{cases} 0, & \text{für Drehgelenk } i; \\ 1, & \text{für Schubgelenk } i. \end{cases}$$

$m_i$  : Masse des Gelenks  $i$ .

$J_i^{<i>}$  : Auf die Orientierung von  $[\underline{x}_i \ Y_i \ Z_i]$  bezogener, im Schwerpunkt liegender Trägheitstensor.

$c_i^{<i>}$  : Abstand vom Ursprung der  $i$ -ten körperfesten Koordinatenbasis,  $[\underline{x}_i \ Y_i \ Z_i]$ , zum Schwerpunkt des Gelenks  $i$ .

$$\underline{h}_i^{<i>} = \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \sin \beta_i \\ d_i \cos \beta_i \end{bmatrix},$$

$i = 1, \dots, n-1$  mit  $b_i, d_i, \beta_i$  als kinematische Parameter.

$h_n^{<n>}$  : Abstand vom Ursprung  $O_n$  zum Endeffektor.

$$(c_i^{<i>} + h_i^{<i>})$$

$\underline{sa}_0^{<o>}$  : Beschleunigung des Ursprungs  $O_0$ .

$\underline{g}^{<o>}$  : Erdbeschleunigung.

$\underline{\omega}_0^{<o>} = \underline{0}$ , Winkelgeschwindigkeit des Gestells.

$\underline{\alpha}_0^{<o>} = \underline{0}$ , Winkelbeschleunigung des Gestells.

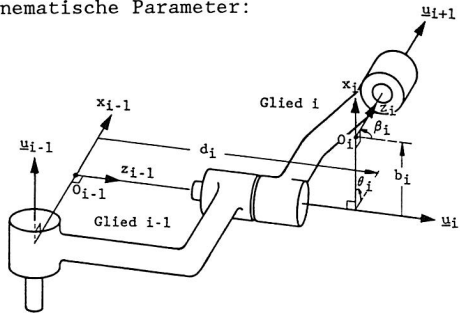
$$\text{Es sei : } \underline{sa}_0^{<o>} = \underline{sa}_0^{<o>} - \underline{g}^{<o>}$$

Bemerkung :

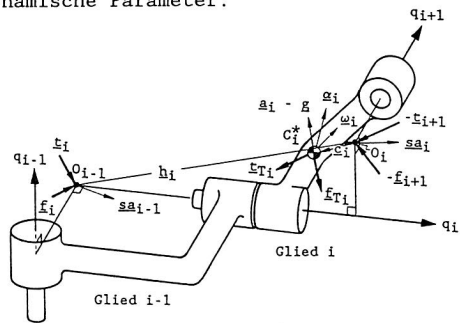
Das Rechtsoberzeichen " $<i>$ " bedeutet die auf die Koordinatenbasis  $[\underline{x}_i \ Y_i \ Z_i]$  bezogene Darstellung.

DENAVIT-HARTENBERG-NOTATION

Kinematische Parameter:



Dynamische Parameter:



$q_i$  : Verrückung des Gelenks  $i$

$\omega_i$  : Winkelgeschwindigkeit des Gelenks  $i$

$\alpha_i$  : Winkelbeschleunigung des Gelenks  $i$

$\underline{a}_i$  : Beschleunigung am Schwerpunkt  $C_i^*$

$\underline{sa}_i$  : Beschleunigung am Ursprung  $O_i$

$\underline{f}_i$  : äquivalente Reaktionskraft am Ursprung  $O_i$

$\underline{t}_i$  : äquivalentes Reaktionsmoment am Ursprung  $O_i$

$\underline{f}_{T_i}$  : Trägheitskraft des Gelenks  $i$

$\underline{t}_{T_i}$  : Trägheitsmoment des Gelenks  $i$

$\underline{z}_i$  : Antriebskraft bzw. -moment

Bemerkung:

$-\underline{f}_{n+1}^{<n>} = \underline{f}_E^{<n>}$  : Taktilskraft am Endeffektor

$-\underline{t}_{n+1}^{<n>} = \underline{t}_E^{<n>}$  : Taktilmoment am Endeffektor

Bild 4-2. Ablaufdiagramm der auf dem normalen Eingangsachsen-Koordinatensystem basierenden, rekursiven Newton-Eulerschen Formulierung

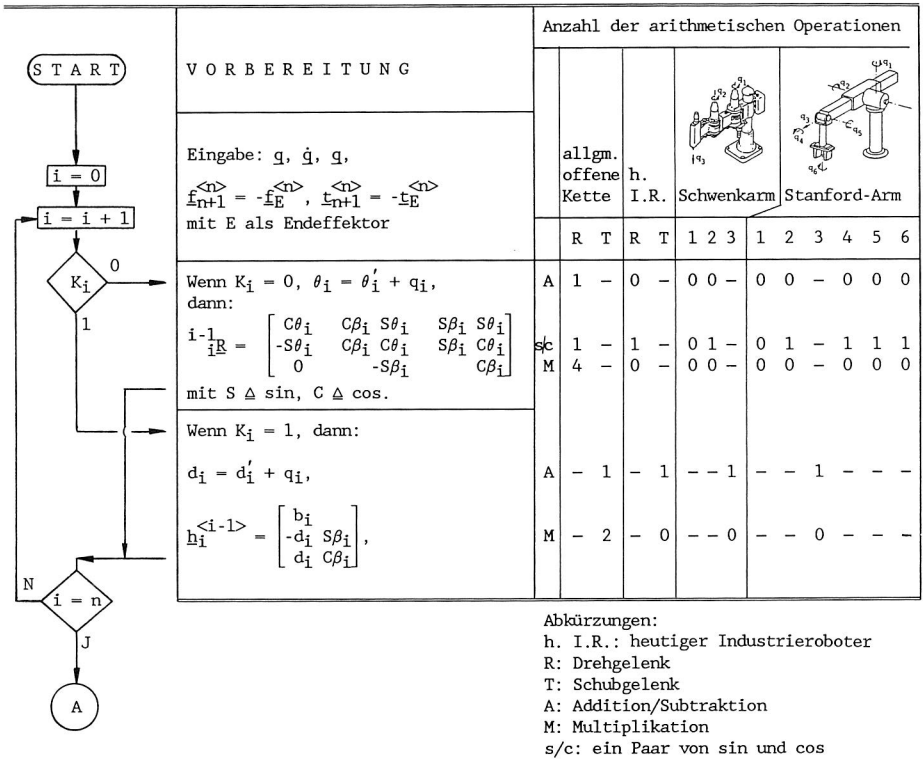


Bild 4-2. (fortgesetzt)

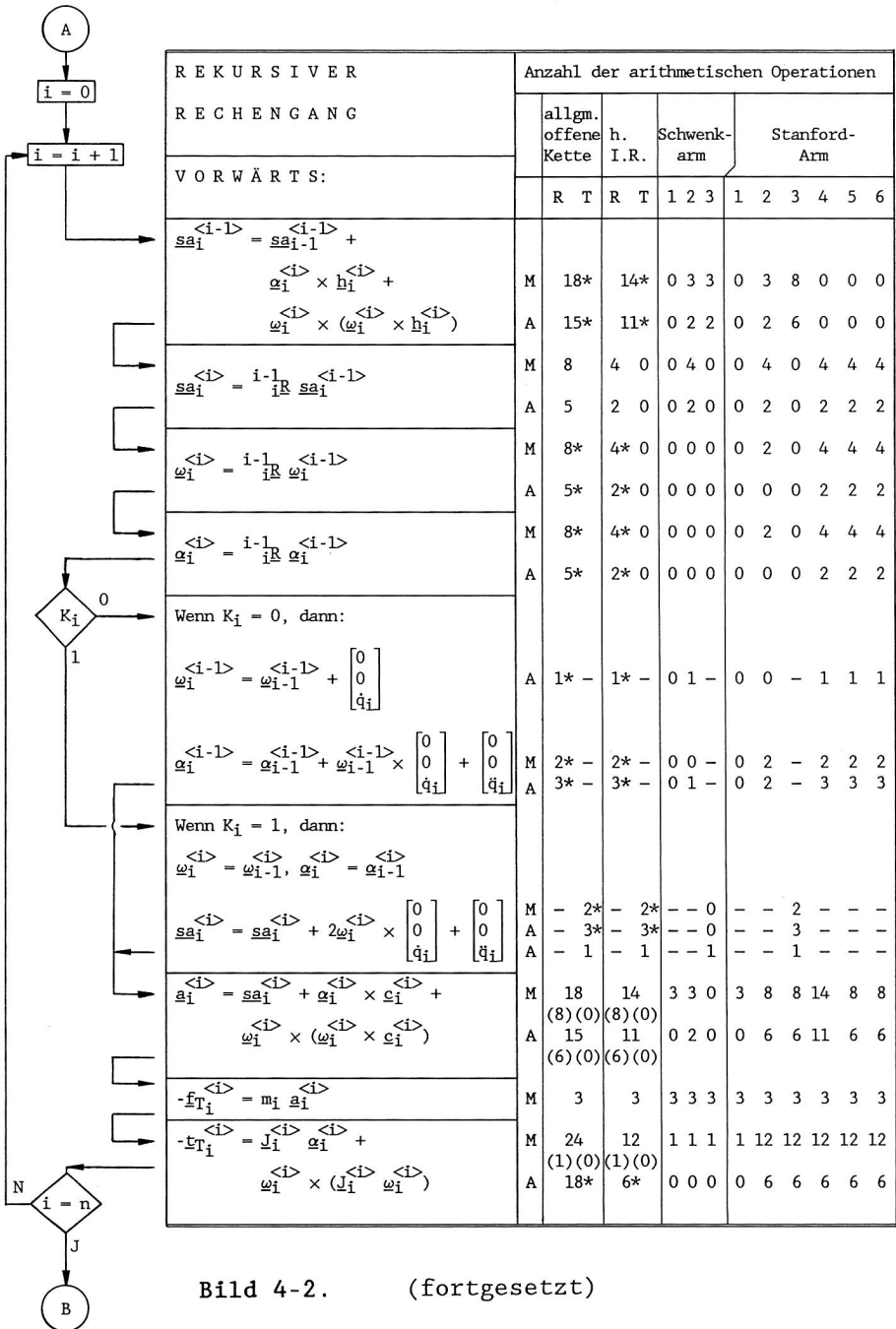
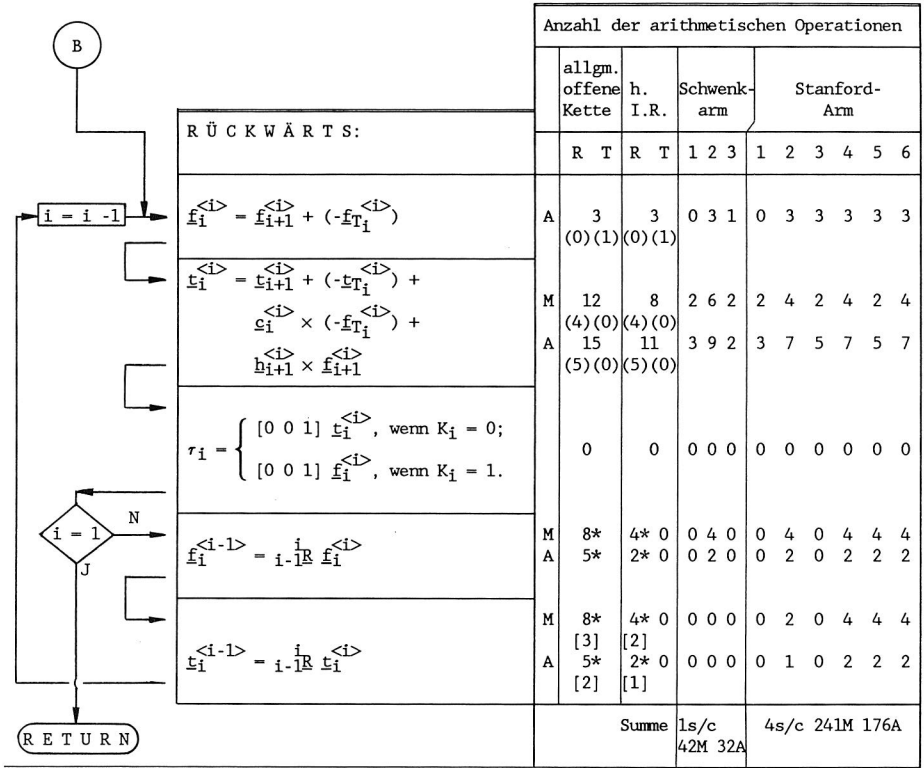


Bild 4-2. (fortgesetzt)





Bemerkung:

\*: Die Anzahl der Operationen für  $i=1$  ist null.

( ): Die Zahl darin ist für  $i=1$ .

[ ]: Die Zahl darin ist für  $i=2$ .

Bild 4-2. (fortgesetzt)

zugehörigen körperfesten Koordinaten aus.

Ziel ist es, eine Mikroprozessorensoftware des dynamischen Systems für den heutigen Industrieroboter aufzubauen. Zuerst wird der Rechenaufwand jedes einzelnen Algorithmus untersucht, und diese Ergebnisse werden miteinander verglichen.

Beide oben genannte Algorithmen weisen verschieden viele arithmetische Operationen auf. Die einzelnen Operationen jeden Schrittes für eine allgemeine offene Kette, einen heutigen Industrieroboter, den Schwenkarm und den Stanford-Arm (s. Bild 2-2 und Bild 2-6) sind auch neben den Ablaufdiagrammen in den Bildern 4-1 und 4-2 genau eingetragen. Zum Vergleich sind nochmals die Summen in Tabelle 4-1 dargestellt.

Die Gründe für die geringere Anzahl von Operationen des ersten und zweiten Gelenkes sind:

- $\omega_0 = \alpha_0 = 0$ ; das Gestell dreht sich nicht,
- nur die z-Komponenten der Kräfte bzw. Momente sind nötig für die erste Antriebskraft bzw. das erste Antriebsmoment.

Der heutige Industrieroboter kann weniger Operationen als eine allgemeine offene Kette durchführen. Gründe hierfür sind:

- weniger Operationen in den Koordinatentransformationen, weil  $\theta'$  und  $\beta$  Vielfache von  $90^\circ$  sind,
- maximal nur 2 Komponenten der Abstandsvektoren zwischen den Ursprüngen ( $\underline{h}_i^{<i>$  in Bild 4-1 oder  $\underline{h}_i^{<i-1>}$  in Bild 4-2), weil  $\cos\beta_i$  und  $\sin\beta_i$  entweder  $\pm 1$  oder 0 sind,
- maximal nur 2 Komponenten der Abstandsvektoren von den Ursprüngen zu den jeweiligen Schwerpunkten,

Tabelle 4-1. Anzahl der arithmetischen Operationen der beiden Newton-Eulerschen Algorithmen

	normales Eingangsachsen-Koordinatensystem	Denavit-Hartenberg-Notation
allgemeine	s/c: n-m	s/c: n-m
offene	M: $121(n-m) + 119m - 3$	M: $123(n-m) + 125m - 3$
Kette	- $93(1-K_1) - 106K_1$	- $74(1-K_1) - 110K_1$
	A: $96n - 2$	A: $97(n-m) + 101m - 2$
	- $79(1-K_1) - 89K_1$	- $68(1-K_1) - 87K_1$
heutiger	s/c: n-m	s/c: n-m
Industrie-	M: $73(n-m) + 53m - 2(1-K_2)$	M: $73(n-m) + 53m - 2(1-K_2)$
roboter	- $53(1-K_1) - 50K_1$	- $48(1-K_1) - 50K_1$
	A: $56(n-m) + 47m - (1-K_2)$	A: $56(n-m) + 48m - (1-K_2)$
	- $43(1-K_1) - 44K_1$	- $39(1-K_1) - 41K_1$
3-achsiger	s/c: 1	s/c: 1
Schwenkarm	M: 42	M: 44
	A: 32	A: 36
6-achsiger	s/c: 4	s/c: 4
Stanford-	M: 241	M: 249
Arm	A: 176	A: 183

Abkürzungen: s/c: ein Paar von cos und sin

M: Multiplikation

A: Addition/Subtraktion

n: Anzahl der Gelenke

m: Anzahl der Schubgelenke

$K_i = \begin{cases} 0, & \text{Drehgelenk } i \\ 1, & \text{Schubgelenk } i \end{cases}$

— eine diagonale Matrix bei J wegen der Ausrichtung der Hauptträgheitsachsen nach den körperfesten Koordinaten.

Außerdem ist es nicht nötig, Sinus und Cosinus für die Achswinkelgröße des ersten Drehgelenks (d.h.  $\sin\theta_1$  und  $\cos\theta_1$ ) zu berechnen, wenn der Summenvektor von der Erdbeschleunigung und der Beschleunigung des Gestells nur eine z-Komponente hat, was beim Einsatz von Industrierobotern der Normalfall ist.

Aus Tabelle 4-1 wird ersichtlich, daß die Anzahl der

Operationen der beiden Algorithmen fast gleich ist. Allerdings ist der auf dem normalen Eingangsachsen-Koordinatensystem basierende noch günstiger und wird deshalb empfohlen.

Vor der Implementierung sollte der günstigere Algorithmus mit der schon erfolgreich implementierten Vukobratovic-Kircanskischen numerisch-symbolischen Methode [69] verglichen werden. Der in Tabelle 4-2 vorliegende Vergleich zeigt, daß bei den Robotern mit drei oder weniger Achsen die numerisch-symbolische Methode günstiger ist, während der oben erwähnte Algorithmus sich besser für mehrachsige Roboter eignet.

**Tabelle 4-2.** Anzahl der arithmetischen Operationen eines Newton-Eulerschen Algorithmus und der numerisch-symbolischen Methode

	normales Eingangsachsen-Koordinatensystem	numerisch-symbolische Methode
3-achsiger Arthropoid	s/c: 2 M: 98 A: 62	s/c: 2 M: 49 + 18† A: 22 + 15†
6-achsiger Stanford-Arm	s/c: 4 M: 241 A: 176	s/c: 4‡ M: 372 + 162† A: 167 + 162†

† Das erste Glied ist die Anzahl der Operationen zur Berechnung der Elemente in den Matrizen, das zweite ist die Anzahl der Multiplikationen der Matrizen mit den Vektoren  $\underline{q}$ ,  $\underline{\ddot{q}}$ , bzw. die Anzahl der Additionen.

‡ Auf Seite 224 in [69] findet sich die Angabe 3 s/c; es handelt sich hier vermutlich um einen Fehler.

Abkürzungen: s/c: ein Paar von cos und sin

M: Multiplikation

A: Addition/Subtraktion

#### 4.3 Implementierung des dynamischen inversen Systems an einem Mikroprozessor

##### 4.3.1 Struktur der Software zur Implementierung des dynamischen inversen Systems

Zur Implementierung des dynamischen inversen Systems wird der auf dem normalen Eingangachsen-Koordinatensystem basierende Algorithmus gewählt. Ziel ist, eine Mikroprozessorensoftware des dynamischen inversen Systems aufzubauen, die sich für den heutigen Roboter eignet und das Abtastzeitkriterium erfüllt.

Am Mikroprozessor INTEL 8086/8087 können Aufgaben wahlweise in ASM86 oder PL/M86 programmiert werden. Die Assemblersprache ASM86 ist eine maschinenorientierte Programmiersprache, deren elementare Anweisungen die gleiche oder eine ähnliche Struktur wie die Befehle einer bestimmten Rechenanlage haben. Obwohl die Assemblersprache maschinenorientierter als die höhere Programmiersprache PL/M86 ist, können mit ASM86 beliebige Rechenstrukturen angeordnet werden. Zur Reduzierung der Operationen empfiehlt sich deshalb die Assemblersprache ASM86.

Für die vorliegende Aufgabe eignet sich die 4-Byte-Gleitpunkt-Schreibweise der reellen Zahl. Die zwei rekursiven Rechengänge werden getrennt programmiert.

Zuvor sollte eine Eigenschaft erwähnt werden, nämlich daß eine Komponente von  $\underline{\omega}_i^{<i>$  gleich null ist, wenn, und nur wenn die jeweilige Komponente von  $\underline{\alpha}_i^{<i>$  gleich null ist.

Bei der Betrachtung von redundanten Rechenoperationen mit Null und Eins wird der Vorwärtsrechengang in fünf Fälle eingeteilt, die sich in der Struktur von den übrigen redundanten Rechenoperationen unterscheiden. Für jeden Fall werden einige bestimmte Prozeduren aufgebaut. Bild 4-3 zeigt die fünf Fälle und das Ablaufdiagramm des Vorwärtsrechen-

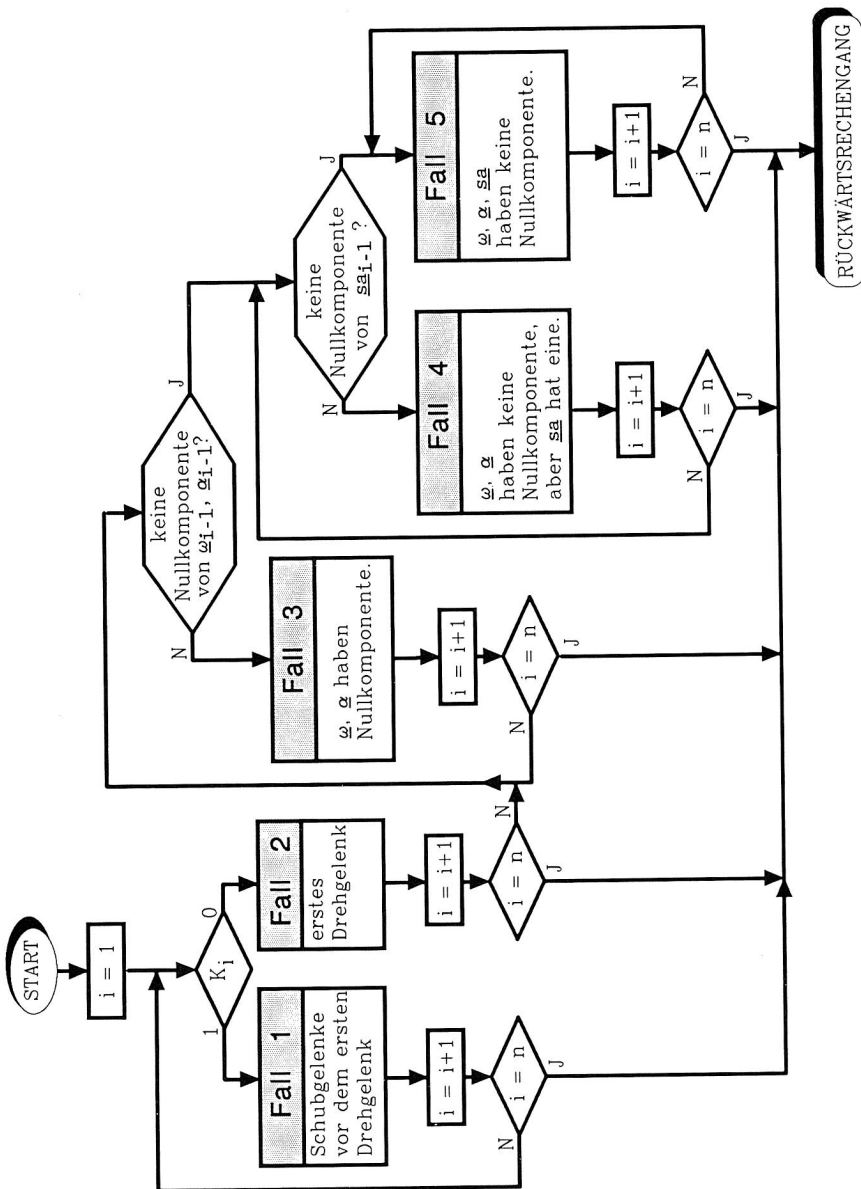


Bild 4-3. Struktur des vorwärts rekursiven Rechengangs

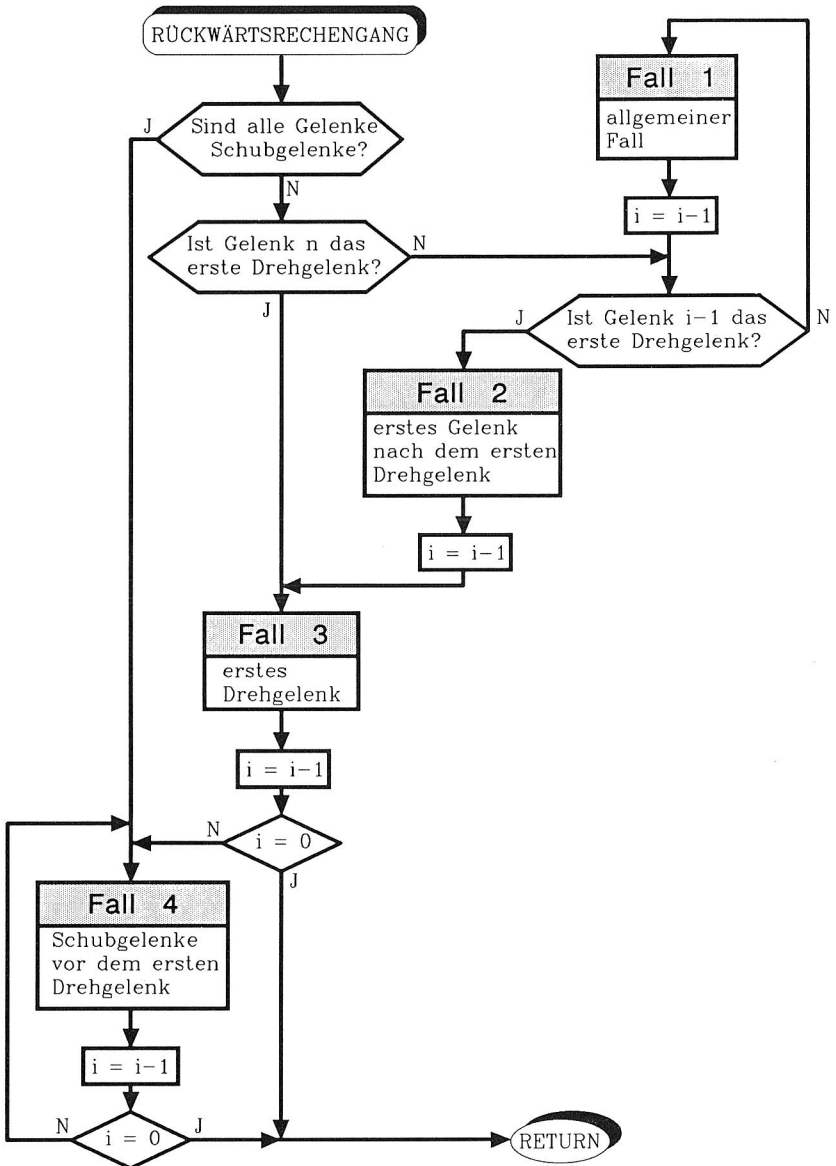


Bild 4-4. Struktur des rückwärts rekursiven Rechengangs

gangs durch Kopplung der fünf Fälle. Analog wird der Rückwärtsrechengang in vier Fälle eingeteilt. Das Ablaufdiagramm des Rückwärtsrechengangs ist in Bild 4-4 dargestellt.

Dabei wird noch die folgende Programmierungstechnik entwickelt:

- Eine Prozedur wird als ein Unterprogramm zur gleichzeitigen Berechnung von Sinus und Cosinus aufgebaut. Dieses ruft den Befehl "FPTAN" nur einmal auf und ist etwa doppelt so schnell wie die Anwendung der Bibliotheksprozeduren "MQERCOS" und "MQERSIN", die den Befehl "FPTAN" jeweils einmal aufrufen.
- Die Datenladung (FLD) in und die Datenholung (FSTP) aus dem 8087-Stapel brauchen viele Takte (FLD: 38-56, FSTP: 86-92). Es empfiehlt sich, die beiden Befehle nach Möglichkeit einzusparen. In dieser Software gibt es maximal 18 "FSTP"-Befehle für ein Gelenk im Vorwärtsrechengang (jeweils einmal für  $\underline{\omega}$ ,  $\underline{\alpha}$ ,  $-\underline{f}_T$ ,  $-\underline{t}_T$  und zweimal für  $\underline{sa}$ ). In dem Rückwärtsrechengang bleiben  $\underline{f}$  und  $\underline{t}$  immer im 8087-Stapel, nur  $r_i$  werden daraus zum Speichern geholt, um später ausgegeben zu werden.
- Die Rechenstruktur von  $\underline{\alpha} \times \underline{c} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{c})$  kann folgendermaßen umformuliert werden:

$$\begin{bmatrix} -(\omega_z^2 + \omega_y^2) & -\alpha_z + \omega_y \omega_x & \alpha_y + \omega_z \omega_x \\ \alpha_z + \omega_x \omega_y & -(\omega_x^2 + \omega_z^2) & -\alpha_x + \omega_z \omega_y \\ -\alpha_y + \omega_x \omega_z & \alpha_x + \omega_y \omega_z & -(\omega_x^2 + \omega_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix}$$

Beide Rechenweisen haben verschieden viele arithmetische Operationen (s. Tabelle 4-3). Für jeden Fall wird die jeweils günstigere angewendet. Außerdem können  $(\omega_x \omega_y)$ ,  $(\omega_y \omega_z)$  und  $(\omega_z \omega_x)$  noch im 8087-Stapel zur späteren Ausführung von  $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{\omega})$  bleiben. Selbstverständlich



könnten diese Werte noch einmal für  $\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{h})$  herangezogen werden [30]. Darauf wird aber aus zwei Gründen verzichtet: Zum einen läßt es Programmierungsschwierigkeiten zu, zum andern sind die meisten Komponenten von  $\underline{h}$ s gleich null.

#### 4.3.2 Ergebnisse des Experiments

Die Software des dynamischen inversen Systems des heutigen Industrieroboters wurde mit dem Entwicklungssystem SME IV entwickelt. Zur Erprobung wurde die experimentelle Einrichtung (s. Bild 4-5) aufgebaut.

Das Programm wird durch das System SME IV entwickelt und in das Multi-Mikrocomputersystem MMC 216 geladen. Die bekannten kinematischen und dynamischen Parameter sowie die Eingangsgröße werden auch durch SME IV eingegeben bzw. geändert und in MMC 216 übertragen. Der sekundäre Monitor empfängt die

Tabelle 4-3. Vergleich der Vektor- und der Matrixform der Rechenstruktur von  $\underline{\alpha} \times \underline{c} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{c})$

FALL I:  $c_x \neq 0, c_y = c_z = 0$

Vektorstruktur:

$$a_x - sa_x = -\omega_z (\omega_z c_x) + \omega_y (-\omega_y c_x)$$

$$a_y - sa_y = \alpha_z c_x - \omega_x (-\omega_y c_x)$$

$$a_z - sa_z = -\alpha_y c_x + \omega_x (\omega_z c_x)$$

Matrixstruktur:

$$a_x - sa_x = -(\omega_z \omega_z + \omega_y \omega_y) c_x$$

$$a_y - sa_y = (\alpha_z + \omega_x \omega_y) c_x$$

$$a_z - sa_z = (-\alpha_y + \omega_x \omega_z) c_x$$

$\alpha_x, \omega_x$	0	x	0	0	x	x	0	x
$\alpha_y, \omega_y$	0	0	x	0	x	0	x	x
$\alpha_z, \omega_z$	0	0	0	x	0	x	x	x
Vektorstruktur	0	0M 0A	3M 0A	3M 0A	4M 0A	4M 0A	6M 1A	8M 3A
Matrixstruktur	0	0M 0A	3M 0A	3M 0A	5M 0A	5M 0A	5M 1A	7M 3A

Tabelle 4-3. (fortgesetzt)

FALL II:  $c_x \neq 0$ ,  $c_y \neq 0$ ,  $c_z = 0$

Vektorstruktur:

$$a_x - sa_x = -a_z c_y - \omega_z (\omega_z c_x) + \omega_y (-\omega_y c_x + \omega_x c_y)$$

$$a_y - sa_y = a_z c_x + \omega_z (-\omega_z c_y) - \omega_x (-\omega_y c_x + \omega_x c_y)$$

$$a_z - sa_z = -a_y c_x + \omega_x c_y - \omega_y (-\omega_z c_y) + \omega_x (\omega_z c_x)$$

Matrixstruktur:

$$a_x - sa_x = -(\omega_z \omega_z + \omega_y \omega_y) c_x + (-a_z + \omega_y \omega_x) c_y$$

$$a_y - sa_y = (a_z + \omega_x \omega_y) c_x - (\omega_x \omega_x + \omega_z \omega_z) c_y$$

$$a_z - sa_z = (-a_y + \omega_x \omega_z) c_x + (a_x + \omega_y \omega_z) c_y$$

$a_x, \omega_x$	0	x	0	0	x	x	0	x
$a_y, \omega_y$	0	0	x	0	x	0	x	x
$a_z, \omega_z$	0	0	0	x	0	x	x	x
Vektorstruktur	0	3M 0A	3M 0A	6M 2A	6M 2A	10M 4A	10M 4A	14M 8A
Matrixstruktur	0	3M 0A	3M 0A	5M 2A	9M 3A	9M 4A	9M 4A	12M 9A

FALL III:  $c_x \neq 0$ ,  $c_y \neq 0$ ,  $c_z \neq 0$

Vektorstruktur:

$$a_x - sa_x = -a_z c_y + a_y c_z - \omega_z (\omega_z c_x - \omega_x c_z) + \omega_y (-\omega_y c_x + \omega_x c_y)$$

$$a_y - sa_y = a_z c_x - a_x c_z + \omega_z (-\omega_z c_y + \omega_y c_z) - \omega_x (-\omega_y c_x + \omega_x c_y)$$

$$a_z - sa_z = -a_y c_x + a_x c_y - \omega_y (-\omega_z c_y + \omega_y c_z) + \omega_x (\omega_z c_x - \omega_x c_z)$$

Matrixstruktur:

$$a_x - sa_x = -(\omega_z \omega_z + \omega_y \omega_y) c_x + (-a_z + \omega_y \omega_x) c_y + (a_y + \omega_z \omega_x) c_z$$

$$a_y - sa_y = (a_z + \omega_x \omega_y) c_x - (\omega_x \omega_x + \omega_z \omega_z) c_y + (-a_x + \omega_z \omega_y) c_z$$

$$a_z - sa_z = (-a_y + \omega_x \omega_z) c_x + (a_x + \omega_y \omega_z) c_y - (\omega_y \omega_y + \omega_x \omega_x) c_z$$

$a_x, \omega_x$	0	x	0	0	x	x	0	x
$a_y, \omega_y$	0	0	x	0	x	0	x	x
$a_z, \omega_z$	0	0	0	x	0	x	x	x
Vektorstruktur	0	6M 2A	6M 2A	6M 2A	12M 6A	12M 6A	12M 6A	18M 12A
Matrixstruktur	0	5M 2A	5M 2A	5M 2A	12M 7A	12M 7A	12M 7A	15M 15A

Abkürzungen: x als Wert, der nicht gleich null ist  
M als Multiplikation  
A als Addition

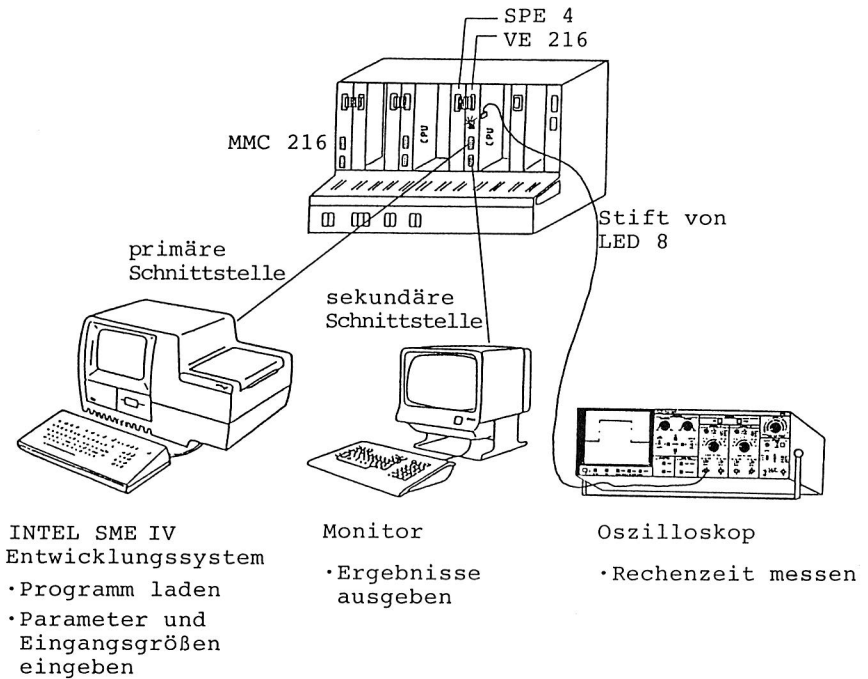


Bild 4-5. Experimentelle Einrichtung für die Software zum dynamischen inversen System

Ausgangsgröße. Das Oszilloskop empfängt das Signal aus LED 8, das am Anfang und am Ende der Berechnung des dynamischen inversen Systems durch das Programm ein- bzw. ausgeschaltet wird. Die Dauer des Signals entspricht dann der Rechenzeit des dynamischen inversen Systems.

Zur Erprobung wurde auch ein anderes Programm gemäß eines üblichen Algorithmus geschrieben, das eine wesentlich längere Rechenzeit benötigt. Da beide Programme zum gleichen Ergebnis kommen, wird die Richtigkeit der in Abschnitt 4.3.1 erwähnten Software bestätigt.

Gleichzeitig wurden die Rechenzeiten für einige typische

Industrieroboter bei 5MHz Takt gemessen. Die maximalen Rechenzeiten sind in Bild 4-6 graphisch dargestellt.

Der Komplexroboter wird als heutzutage rechenaufwendigster Industrieroboter angesehen, weil jeweils zwei Komponenten bei  $h_2^{<1>}$ ,  $h_3^{<2>}$ ,  $h_4^{<3>}$  ungleich null sind. Die maximale Rechenzeit für den Stanford-Arm beträgt 16,9ms und liegt damit knapp unter dem Kriterium von 17ms. Gleichwohl überschreiten die Rechenzeiten für den PUMA-600 und den Komplexroboter die kritische Abtastzeit geringfügig. Wenn die Taktfrequenz auf 8MHz-Takt erhöht wird, die die Hardwaregrenze darstellt, braucht diese Software für alle heutigen Industrieroboter unter  $20,9 \times (5/8) = 13,1$ ms Rechenzeit.

Die Anwendung dieser Software ist flexibel, anwenderfreundlich und erfüllt in jedem Fall das Abtastzeitkriterium.

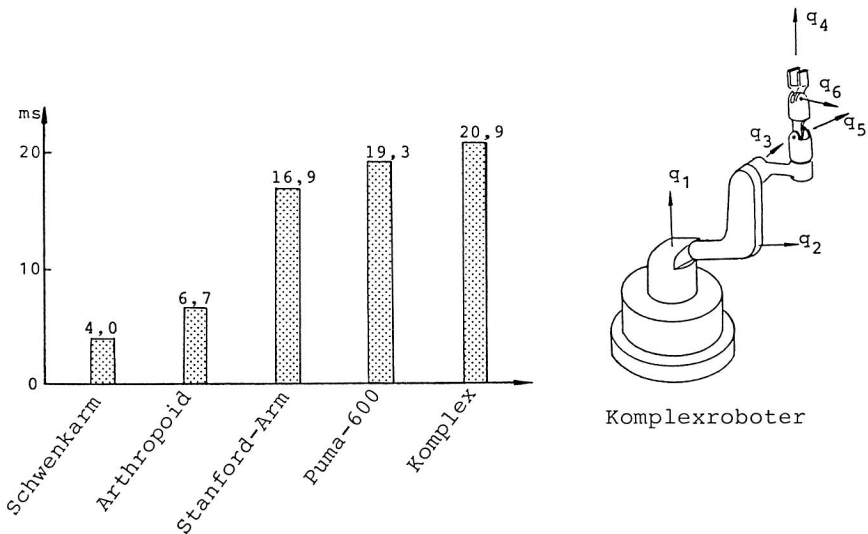


Bild 4-6. Maximale Rechenzeiten der Implementierung der entwickelten Software an dem Multi-Mikrocomputersystem MMC 216 bei 5MHz Takt

## 5 KARTESISCHE LAGEREGELUNG

### 5.1 Problemstellung

Die Regelung von Robotern im Kartesischen Weltkoordinatensystem beschäftigte viele Forscher [6, 22, 41, 55]. Der Bahnverlauf des Endeffektors, den zu beschreiben normalerweise auch Aufgabe ist, wird unmittelbar als Führungsgröße in den Regler eingegeben, nicht mehr in die Bewegungen der Gelenke transformiert. Der Hauptvorteil der Kartesischen Lageregelung zeigt sich bei der unmittelbaren Steuerung der Bahn des Endeffektors. Dadurch wird auch die von der Gelenk-Lageregelung unsteuerbare, nichtvernachlässigbare Bahnabweichung vermieden, die durch geringfügige Abweichungen in den Gelenkkoordinaten aufgrund der Koordinatentransformation, abhängig von der Gelenkkonfiguration, verursacht wird. Beispielsweise kann eine geringfügige Winkelabweichung des Gelenks 2 bei einem zweiachsigen Roboter (s. Bild 3-1) eine nichtvernachlässigbare Bahnabweichung im Weltkoordinaten herbeiführen, wenn das Getriebe-glied 2 sehr lang ist.

In der Literatur läßt sich die Kartesische Lageregelung in zwei Methoden unterteilen: die Regelung mit Entkopplung [6, 22, 41] und die adaptive Regelung [55]. Die meisten Wissenschaftler [6, 22, 55] befaßten sich in erster Linie nur mit der Position des Endeffektors und verwiesen den Anwender zur Orientierungssteuerung auf die Positionssteuerung. Sie behaupteten, daß die Orientierung des Endeffektors wie auch die Position von drei Komponenten (z.B. Eulersche Winkel) dargestellt wird und die Orientierungsabweichung dann einfach durch die Differenz der Sollkomponenten und der Istkomponenten definiert werden könne.

Tatsächlich stellt die Orientierungssteuerung ein ernsthaftes Problem dar. Die Singularität der Eulerschen Winkel beeinträchtigt die Zuverlässigkeit der Steuerung. Die Tatsache, daß sich die Differenz von zwei Sätzen der

Eulerschen Winkel für die Sollorientierung und die Istorientierung mit der Drehung von der Istorientierung zur Sollorientierung unterscheidet, ruft auch Zweifel an der Leistungsfähigkeit in der Anwendung der Eulerschen Winkel hervor.

Die Orientierung des Endeffektors kann mit drei am Endeffektor festgelegten orthogonalen Achsen dargestellt werden [41] (s. Bild 5-1). Diese Achsen entsprechen einer rechtshändigen Kartesischen Basis. Deren auf die Weltkoordinatenbasis bezogene Darstellungen sind gleich den ersten drei Spalten der homogenen Transformationsmatrix der Weltkoordinatenbasis zur am Endeffektor festgelegten Koordinatenbasis, d.h. (s. Kapitel 3):

$$\begin{bmatrix} \underline{n}^{<o>} & \underline{s}^{<o>} & \underline{a}^{<o>} & \underline{r}^{<o>} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^E_H(q), \quad (5.1)$$

wobei  $q$  die Gelenkkoordinaten sind. Weiterhin ist die Beziehung zwischen zwei Orientierungen eine Rotations-

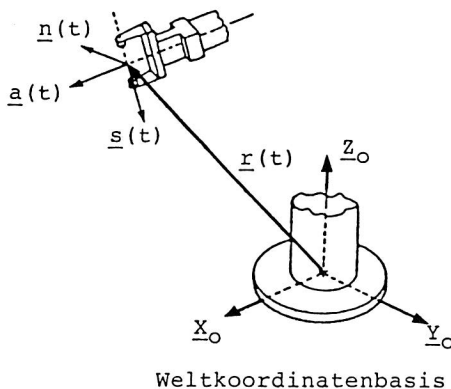


Bild 5-1. Darstellung der Ausgangsvariablen eines Roboters

transformation. Die Orientierungsabweichung kann einfach als eine Drehung definiert werden.

Luh, Walker und Paul [41] definierten zuerst die Orientierungsabweichung als

$$\underline{\epsilon}_e = \sin\theta \underline{u} \quad (5.2)$$

mit  $\underline{u}$  als Einheitsvektor der Drehachse und  $\theta$  als Drehwinkel von der Istorientierung zur Sollorientierung. Durch die Verwendung dieser Definition befaßten sie sich aber nur mit der Regelung der kleinen Lageabweichung.

Ang und Tourassis [2] transformierten die Orientierungsabweichung der Gl.(5.2) in eine Funktion der Eulerschen Winkel und simulierten die Regelung von Luh, Walker und Paul, allerdings bei einer großen Abweichung, für ein kugelförmiges Handgelenkgetriebe, dessen Antriebsachsen wie ein Getriebe der Eulerschen Winkel angeordnet sind. Das Ergebnis zeigt, daß diese Regelung auch konvergent für große Orientierungsabweichungen ist, aber in der Nähe der Singularität der Eulerschen Winkel eine Abweichungsüberhöhung auftritt. Außerdem ist die Kopplung mit der Positionsregelung in dieser Simulation nicht besprochen.

Im Gegensatz dazu entwickelten Gilbert und Ha [17] einen PID/PD-Regler durch die Rückführungsentkopplung im Ausgangsraum statt im Zustandsraum. In diesen Regler wurde die Orientierungsabweichung der Gl.(5.2) erfolgreich eingesetzt. Anstatt eine Simulation vorzunehmen, bewiesen sie qualitativ die Robustheit des Reglers. Andererseits wurde die Singularitätsanalyse des Kartesischen PID/PD-Reglers wegen der Komplexität der Ableitungen der Orientierungsabweichung dabei nicht berücksichtigt.

Den Eulerschen Winkeln stehen die Eulerschen Parameter gegenüber, bei denen das Problem der Singularität nicht auftritt. Die Eulerschen Parameter wurden früher schon zur

Lage von Raumflugzeugen verwendet. Hier wird versucht, mit den Eulerschen Parametern die Schwierigkeit der Orientierungssteuerung zu bewältigen. Die Kartesische Lageregelung durch die Rückführungsentkopplung bei der Verwendung der Eulerschen Parameter wird in diesem Kapitel genauer untersucht, ebenso wie deren Singularität und Konvergenz.

## 5.2 Eulersche Parameter

Im achtzehnten Jahrhundert leitete der große Mathematiker L. Euler die nach ihm so benannten Eulerschen Parameter her, die zum Eulerschen Theorem über die Rotationsbewegung eines starren Körpers gehören [65]. 1843 entdeckte W. R. Hamilton die Quaternionen [70], die aus der Erweiterung der komplexen Zahlen entstanden sind. Tatsächlich bilden die Eulerschen Parameter auch eine normierte Quaternion. Die Algebra der Quaternionen erleichtert die Manipulation der Eulerschen Parameter.

Die Überlegenheit der Eulerschen Parameter beim rotatorischen Problem über die anderen Drehdarstellungen (wie z.B. die rotatorische Matrix, den Drehwinkel und die Drehachse  $(\theta, \underline{u})$ , die Rodrigueschen Parameter, die Eulerschen Winkel, die Cayley-Kleinschen Parameter) ist vor kurzem von Spring [65] erörtert worden. In den folgenden Abschnitten geht es um die Möglichkeit des Einsetzens der Eulerschen Parameter bei der Behandlung der Orientierungsabweichung von Robotern.

Die Eulerschen Parameter entsprechend einer Drehung von  $\theta$  um die Achse  $\underline{u}$  lauten:

$$\underline{e} = \begin{bmatrix} \theta \\ \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \underline{u} \end{bmatrix},$$



Aus der Tatsache, daß eine Drehung von  $\theta$  um  $\underline{u}$  mit einer anderen von  $(2\pi - \theta)$  um  $-\underline{u}$  übereinstimmt, folgt, daß  $\underline{e}$  und  $-\underline{e}$  dieselbe physikalische Bedeutung haben. Sei der Bereich von  $\theta$  so definiert, daß gilt  $-\pi < \theta \leq \pi$ , werden die Eulerschen Parameter die einzig definierten Funktionen einer endlichen Drehung mit

$$e_0 = \cos \frac{\theta}{2} \geq 0.$$

Wegen der Normierungseigenschaft der Eulerschen Parameter (die Quadratsumme der vier Parameter ist somit gleich eins) hängt ein Parameter von den drei anderen ab. Physikalisch gehören zu einer Drehung überhaupt nur drei Variablen.

Zunächst wird das Verhalten der Eulerschen Parameter beobachtet. Wenn  $\theta$  sich Null nähert, nähert sich  $e_0$  an Eins an, aber die anderen drei Parameter nähern sich an Null an. Geht man davon aus, daß die Orientierungsabweichung durch eine Drehung dargestellt wird, können die letzten drei Eulerschen Parameter,  $\sin(\theta/2)$   $\underline{u}$ , als die Orientierungsabweichung definiert werden.

Die Algebra der Eulerschen Parameter und deren Anwendung auf Roboter werden in [36] ausführlich dargelegt. Die wichtigsten Ergebnisse sind im Anhang zu finden.

### 5.3 Kartesische Lageregelung durch Rückführungsentkopplung

Bei der Rückführungsentkopplung eines nichtlinearen Systems existieren verschiedene Verfahren, um das inverse System herzuleiten. Freund und Hoyer [16] wendeten die von Porten [53] und Freund [15] entwickelte Methode auf einen zweiachsigen Industrieroboter an. Die Erweiterung dieser Methode auf einen allgemeinen sechsachsigen Roboter wurde von Patzelt [49, 50] geschaffen.

Mit einer gewissen Transformation [25] formten Bejczy, Tarn und Chen [6] das dynamische Modell von Robotern in eine Brunovskysche Normalform um, die eine entkoppelte lineare Form darstellt. Prinzipiell sind beide Methoden äquivalent.

Alternativ fand Sommer [60], daß ein in der nichtlinearen Regelungsnormalform vorliegendes System sich durch eine nichtlineare, zeitvariante Rückführung leicht in ein lineares, zeitinvariantes System überführen läßt. Daraufhin entwickelte er ein Transformationsverfahren, um die bestimmte Bedingungen erfüllenden Systeme in die nichtlineare Regelungsnormalform zu transformieren. Später zeigte Sommer [61] außerdem, daß die Methode von Freund [15] in dem von ihm entwickelten Verfahren [60] als Spezialfall enthalten ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß eine nichtlineare Regelungsnormalform das Inversionsverfahren erleichtert. Glücklicherweise besitzen Roboter inhärent eine nichtlineare Regelungsnormalform.

### 5.3.1 Allgemeine Theorie

Das dynamische Modell eines sechsachsigen Industrieroboters kann wie folgt beschrieben [42, 51, 68] werden:

$$\underline{M}(\underline{q}) \ddot{\underline{q}} + \underline{f}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) = \underline{\tau}, \quad (5.3)$$

wobei

$\underline{M}(\underline{q})$  die 6x6 positiv definite, symmetrische Massenmatrix ist,

$\underline{f}(\dot{\underline{q}}, \underline{q})$  der 6x1 Spaltenvektor ist, die die Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräfte enthält,

$\underline{\tau}$  der 6x1 Spaltenvektor von Antriebskräften ist,

$\underline{q}$  der 6x1 Spaltenvektor von Gelenkverrückungen, d.h. verallgemeinerten Koordinaten, ist.

Diese verkoppelten nichtlinearen Mehrgrößengleichungen können in eine nichtlineare Regelungsnormalform wie z.B.:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \ddot{\underline{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ -\underline{M}^{-1}(\underline{q}) \underline{f}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}(\underline{q}) \end{bmatrix} \underline{r}(t) \quad (5.4)$$

mit  $\underline{q}$ ,  $\dot{\underline{q}}$  als Zustandsvariable umgeschrieben werden, weil die Inversion von  $\underline{M}$  existiert. Das inverse System zu suchen ist gleichbedeutend damit, die Führungsgröße  $\underline{r}(t)$  festzustellen, so daß gilt:

$$\ddot{\underline{q}}(t) = \ddot{\underline{q}}^*(t), \quad (5.5)$$

mit  $\ddot{\underline{q}}^*$  als den verallgemeinerten Sollbeschleunigungen. Durch Einsetzen der Gl.(5.5) in die Gl.(5.4) ergibt sich:

$$\underline{r}(t) = \underline{f}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) + \underline{M}(\underline{q}) \ddot{\underline{q}}^*. \quad (5.6)$$

Diese Gleichung ist das inverse System des Roboters und entspricht dem dynamischen Modell der Gl.(5.3) mit Ausnahme von  $\ddot{\underline{q}}^*$  statt  $\underline{r}$  als Führungsgrößen. Durch Kompensation mittels des inversen Systems wird das nichtlineare System entkoppelt und linearisiert, so daß die Istbeschleunigungen immer gleich den Sollbeschleunigungen sind.

Damit ein gutes Ausgangsverhalten beibehalten wird, wird ein Rückführungsregler eingeführt. Die Ausgangsgrößen sind die Position und die Orientierung des Endeffektors; vgl. Gl.(5.1). Das Ausgangsverhalten läßt sich mit einer Ausgangsabweichungsfunktion  $\underline{\epsilon}$  darstellen, die eine Funktion der Istposition und -orientierung und der Sollposition und -orientierung des Endeffektors ist:

$$\underline{\epsilon}(t) = \underline{\epsilon}(\underline{n}_d, \underline{s}_d, \underline{a}_d, \underline{r}_d, \underline{n}, \underline{s}, \underline{a}, \underline{r}), \quad (5.7)$$

wobei das Rechtsunterzeichen "d" den Sollwert kennzeichnet. Es sei darauf hingewiesen, daß  $\underline{\epsilon}$  ein 6x1 Spaltenvektor ist, da der Roboter sechs Freiheitsgrade hat. Die erste und die zweite Zeitableitung von  $\underline{\epsilon}(t)$  lauten:

$$\dot{\underline{\epsilon}}(t) = \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}_d} \dot{\underline{h}}_d + \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}} \dot{\underline{q}}, \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{\epsilon}}(t) = & \underline{\xi}(\ddot{\underline{n}}_d, \dots, \dot{\underline{n}}_d, \dots, \dot{\underline{n}}, \dots, \underline{n}_d, \dots, \underline{n}, \dots, \underline{r}) \\ & + \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}} \ddot{\underline{q}}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei

$$\left[ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} \right] \triangleq \left[ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{n}} \quad \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{s}} \quad \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{a}} \quad \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{r}} \right],$$

$$\underline{h} \triangleq [\underline{n}^T \quad \underline{s}^T \quad \underline{a}^T \quad \underline{r}^T]^T,$$

$$\left[ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{n}} \right] \triangleq \left[ \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial n_x} \quad \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial n_y} \quad \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial n_z} \right],$$

$$\underline{n} \triangleq [n_x \quad n_y \quad n_z]^T$$

und  $\underline{\xi}$  eine bestimmte Funktion ist.

Ziel der Regelung ist, daß das geregelte Gesamtsystem mit einer PID-Abweichungsgleichung

$$\ddot{\underline{\epsilon}}(t) = \underline{v}(t) \triangleq -\underline{K}_I \int \underline{\epsilon}(t) dt - \underline{K}_P \underline{\epsilon}(t) - \underline{K}_D \dot{\underline{\epsilon}}(t) \quad (5.10)$$

dargestellt werden kann, wobei  $\underline{K}_I$ ,  $\underline{K}_P$ ,  $\underline{K}_D$  6x6 Parametermatrizen sind. Durch Einsetzen der Gln.(5.5) und (5.10) in die Gl.(5.9) folgt die verallgemeinerte Sollbeschleunigung:

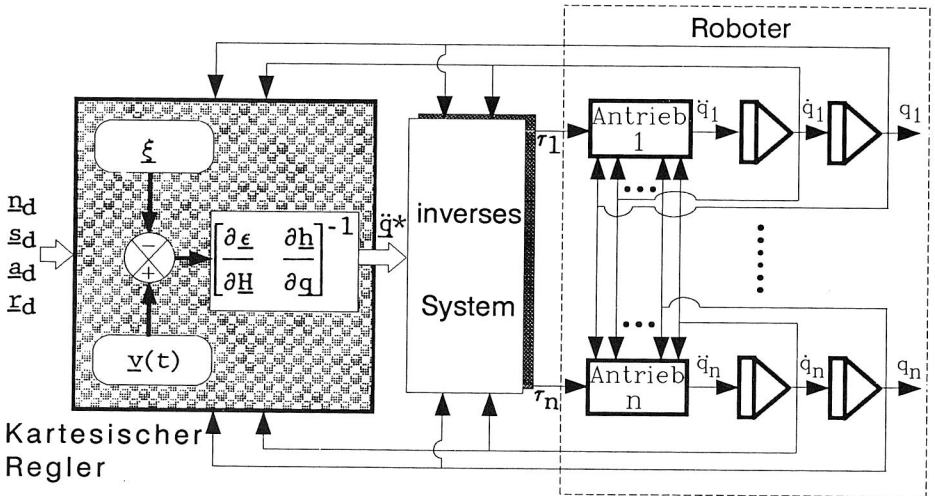


Bild 5-2. Kartesische Lageregelung durch die Rückführungs-  
entkopplung

$$\ddot{\underline{q}}^*(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{\epsilon}}{\partial \underline{H}} & \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{q}} \end{bmatrix}^{-1} (\underline{v}(t) - \underline{\xi}) \quad (5.11)$$

unter der Voraussetzung, daß die Inversion existiert. Weil  $\underline{v}$ ,  $\underline{\xi}$ ,  $\underline{\epsilon}$  Funktionen von  $\underline{h}_d$ ,  $\underline{h}$ ,  $\underline{h}_d$ ,  $\underline{h}$ ,  $\underline{h}_d$  sind, ist es  $\ddot{\underline{q}}^*$  auch. Das geregelte Gesamtsystem ist in Bild 5-2 schematisch dargestellt und kann durch die homogene Differentialgleichung dritter Ordnung der Gl.(5.10) beschrieben werden. Die Konvergenz des Systems wird durch eine angemessene Zuweisung der Parametermatrizen gesichert.

Die Implementierung des inversen Systems von Robotern an einem üblichen Mikroprozessor wurde schon in Kapitel 4 behandelt. Aufgabe ist nun, eine günstige Abweichungsfunktion  $\underline{\epsilon}(t)$  zu finden und die Existenz der Inversmatrix in Gl.(5.11) zu untersuchen.

### 5.3.2 Kartesische Lageregelung mit den Eulerschen Parametern als Orientierungsabweichung

Die Positions- und die Orientierungsabweichung werden getrennt behandelt. Zunächst wird die Positionsabweichung als die Differenz von der Soll- und Istposition des Endeffektors wie folgt definiert:

$$\underline{\epsilon}_r = \underline{r}_d^{<o>} - \underline{r}_c^{<o>}, \quad (5.12)$$

wobei der Klarheit halber ebenso wie das Rechtsunterzeichen "d" als Sollwert auch das Rechtsunterzeichen "c" als Istwert eingeführt wird. Während  $\underline{r}_d^{<o>}$  die Eingangsgröße ist, wird  $\underline{r}_c^{<o>}$  mit den gemessenen Werten der Gelenkverrückungen durch Gl.(5.1) berechnet.

Die differenzierten kinematischen Gleichungen (s. Kapitel 3) lauten:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}_c^{<o>} \\ \underline{\omega}_c^{<o>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_r \\ \underline{J}_e \end{bmatrix} \dot{\underline{q}}, \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\underline{r}}_c^{<o>} \\ \underline{\alpha}_c^{<o>} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{J}_r \\ \underline{J}_e \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} \dot{\underline{J}}_r \\ \dot{\underline{J}}_e \end{bmatrix} \dot{\underline{q}} \quad (5.14)$$

mit  $\underline{\omega}_c^{<o>}$  und  $\underline{\alpha}_c^{<o>}$  als Winkelgeschwindigkeit bzw. -beschleunigung des Endeffektors.  $\underline{J}_r$  und  $\underline{J}_e$  sind 3x6 Matrizen und bilden die sogenannte Jacobimatrix von Robotern ( $\underline{J}^{<o>}$  in Gl.(3.2)). Damit erhält man die erste und zweite Zeitableitung der Positionsabweichung:

$$\dot{\underline{\epsilon}}_r = \dot{\underline{r}}_d^{<o>} - \dot{\underline{r}}_c^{<o>} = \dot{\underline{r}}_d^{<o>} - \underline{J}_r \dot{\underline{q}}, \quad (5.15)$$

$$\ddot{\underline{\epsilon}}_r = \ddot{\underline{r}}_d^{<o>} - \ddot{\underline{r}}_c^{<o>} = \ddot{\underline{r}}_d^{<o>} - \underline{J}_r \ddot{\underline{q}} - \dot{\underline{J}}_r \dot{\underline{q}}. \quad (5.16)$$

Zur Orientierungsabweichung werden die Eulerschen Parameter gewählt. Wie in Abschnitt 5.2 bereits erwähnt, wird die

Orientierungsabweichung folgendermaßen definiert:

$$\underline{\epsilon}_e = \begin{bmatrix} 0 & \underline{I} \end{bmatrix} \underline{d}_{e<0>}^e, \quad (5.17)$$

wobei  $\underline{I}$  die Einheitsmatrix ist und  $\underline{d}_{e<0>}^e$  die Eulerschen Parameter sind, die die Drehung von der Istorientierung zur Sollorientierung des Endeffektors darstellen. Gemäß der Algebra der Eulerschen Parameter (s. Anhang) kann die Orientierungsabweichung als ein Quaternionenprodukt zweier Sätze der Eulerschen Parameter, die die Drehung von der Orientierung der Weltkoordinatenbasis zur Soll- ( $\underline{d}_{oe<0>}^e$ ) bzw. Istorientierung ( $\underline{c}_{oe<0>}^e$ ) darstellen, umformuliert werden:

$$\underline{\epsilon}_e = \begin{bmatrix} 0 & \underline{I} \end{bmatrix} (\underline{d}_{oe<0>}^e \circ \underline{c}_{oe^*<0>}^e), \quad (5.18)$$

wobei  $\underline{e}^{*<0>}$  die zu  $\underline{e}^{<0>}$  Konjugierte ist, d.h.  $\underline{e}^{*<0>} = [e_0 \ -e_1 \ -e_2 \ -e_3]^T$ , und der Operator "o" die Quaternionenmultiplikation bedeutet, das in einer Matrixschreibweise umgeschrieben werden kann:

$$(\underline{d}_{oe<0>}^e \circ \underline{c}_{oe^*<0>}^e) = \underline{P}(\underline{d}_{oe<0>}^e) \underline{c}_{oe^*<0>}^e \quad (5.19)$$

mit

$$\underline{P}(\underline{e}^{<0>}) = \begin{bmatrix} e_0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_1 & e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_2 & e_3 & e_0 & -e_1 \\ e_3 & -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Die Werte von  $\underline{d}_{oe<0>}^e$  können singularitätsfrei von  $\underline{n}_d^{<0>}$ ,  $\underline{s}_d^{<0>}$ , und  $\underline{a}_d^{<0>}$  extrahiert werden [32, 74], während die Werte von  $\underline{c}_{oe<0>}^e$  unmittelbar mit Hilfe der Meßsignale der Gelenkverrückungen berechnet werden (s. Anhang A.4).

Die Algebra der Eulerschen Parameter führt auch zur Beziehung zwischen den Zeitableitungen der Eulerschen Parameter und der Winkelgeschwindigkeit (s. Gl.n.(A.25) und

(A.26) im Anhang):

$$\begin{aligned} \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} &= \underline{d}_{\underline{o}}^{<o>} \odot \underline{c}_{\underline{e}}^{*<o>} + \underline{d}_{\underline{o}}^{<o>} \odot \underline{c}_{\underline{e}}^{*<o>} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\omega}_d^{<o>} \odot \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} - \frac{1}{2} \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} \odot (\underline{J}_e \dot{\underline{q}}). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Darin ist das Quaternionenprodukt von einer Quaternion und einem Vektor gleich dem normalen Quaternionenprodukt in Gl.(5.19), abgesehen davon, daß der Vektor als eine Vektorquaternion mit erstem Parameter als Null angesehen ist. Weiterhin erhält man auch (s. Gln.(A.27) und (A.28)):

$$\begin{aligned} \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} &= \underline{d}_{\underline{o}}^{<o>} \odot \underline{c}_{\underline{e}}^{*<o>} + \underline{d}_{\underline{o}}^{<o>} \odot \underline{c}_{\underline{e}}^{*<o>} + 2 \underline{d}_{\underline{o}}^{<o>} \odot \underline{c}_{\underline{e}}^{*<o>} \\ &= \frac{1}{2} \underline{\omega}_d^{<o>} \odot \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} - \frac{1}{2} \underline{d}_{\underline{e}}^{*<o>} \odot (\underline{J}_e \ddot{\underline{q}} + \underline{J}_e \dot{\underline{q}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \underline{\omega}_d^{<o>} \odot \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} \odot (\underline{J}_e \dot{\underline{q}}) - \frac{1}{4} \{ \underline{\omega}_d^2 + (\underline{J}_e \dot{\underline{q}})^2 \} \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Gekennzeichnet werden:

$$\begin{aligned} \underline{\xi}_e \triangleq [\underline{0} \quad \underline{I}] \left\{ \frac{1}{2} \underline{\omega}_d^{<o>} \odot \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} - \frac{1}{2} \underline{\omega}_d^{<o>} \odot \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} \odot (\underline{J}_e \dot{\underline{q}}) \right. \\ \left. - \frac{1}{4} (\underline{\omega}_d^2 + (\underline{J}_e \dot{\underline{q}})^2) \underline{d}_{\underline{e}}^{<o>} \right\}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\underline{P}_e \triangleq [\underline{0} \quad \underline{I}] \underline{P}(\underline{d}_{\underline{e}}^{*<o>}) \begin{bmatrix} \underline{0}^T \\ \underline{I} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Dann läßt sich die zweite Zeitableitung der Orientierungsabweichung in folgender Weise darstellen:

$$\ddot{\underline{e}}_e = \underline{\xi}_e - \frac{1}{2} \underline{P}_e (\underline{J}_e \ddot{\underline{q}} + \underline{J}_e \dot{\underline{q}}). \quad (5.25)$$



Die Gln.(5.16) und (5.25) werden nun folgendermaßen zusammengesetzt:

$$\ddot{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{\epsilon}}_r \\ \ddot{\underline{\epsilon}}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_d \\ \dot{\underline{\xi}}_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \frac{1}{2}\underline{P}_e \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \underline{J}_r \\ \underline{J}_e \end{bmatrix} \ddot{\underline{q}} + \begin{bmatrix} \dot{\underline{J}}_r \\ \dot{\underline{J}}_e \end{bmatrix} \dot{\underline{q}} \right). \quad (5.26)$$

Das erste und das zweite Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung entsprechen  $\underline{\xi}$  in Gl.(5.9), und das Matrixprodukt vor  $\ddot{\underline{q}}$  im dritten Glied entspricht  $[(\partial \underline{\epsilon} / \partial \underline{H}) (\partial \underline{H} / \partial \underline{q})]$ .

Durch Anwendung von Gl.(5.11) folgt:

$$\ddot{\underline{q}}^* = \underline{J}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & 2 \underline{P}_e^{-1} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \ddot{\underline{x}}_d^{<0>} \\ \dot{\underline{\xi}}_e \end{bmatrix} - \underline{v}(t) \right) - \dot{\underline{J}} \dot{\underline{q}} \right\}, \quad (5.27)$$

wobei gilt:

$$\underline{v}(t) = -\underline{K}_I \int \underline{\epsilon}(t) dt - \underline{K}_P \underline{\epsilon}(t) - \underline{K}_D \dot{\underline{\epsilon}}(t), \quad (5.28)$$

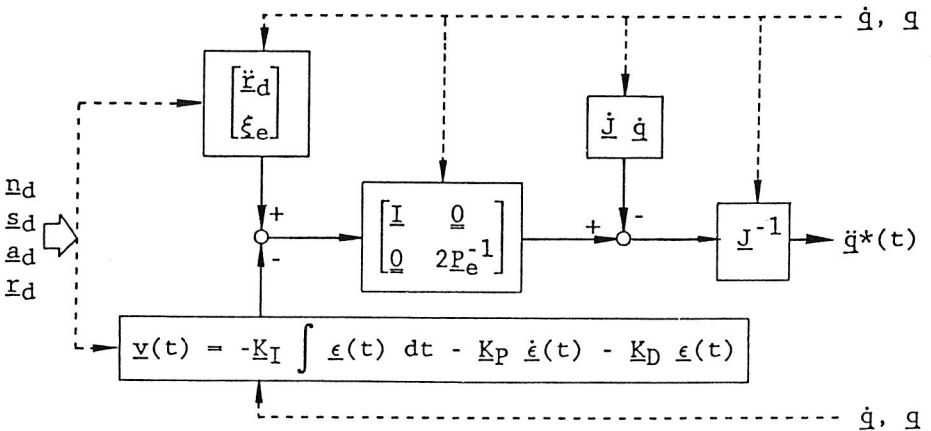


Bild 5-3. Kartesischer Regler mit den Eulerschen Parametern

$$\underline{\epsilon}(t) = \begin{bmatrix} \underline{r}_d^{<0>} - \underline{r}_c^{<0>} \\ [0 \quad \underline{I}] \quad \underline{d}_e^{<0>} \end{bmatrix}, \quad (5.29)$$

$$\dot{\underline{\epsilon}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\underline{r}}_d - \underline{J}_r \dot{\underline{q}} \\ [0 \quad \underline{I}] \quad \underline{d}_e^{<0>} \end{bmatrix}. \quad (5.30)$$

In Bild 5-3 ist das Blockschaltdiagramm des Kartesischen Reglers mit den Eulerschen Parametern dargestellt. Das Gesamtsystem lautet:

$$\ddot{\underline{\epsilon}}(t) + \underline{K}_D \dot{\underline{\epsilon}}(t) + \underline{K}_P \underline{\epsilon}(t) + \underline{K}_I \int \underline{\epsilon}(t) dt = 0. \quad (5.31)$$

Der Regler in Gl.(5.27) fällt aus, wenn die Singularität von  $\underline{J}^{-1}$  oder  $\underline{P}_e^{-1}$  auftritt. Der singuläre Punkt von  $\underline{P}_e^{-1}$  ist  $\theta = \pm 180^\circ$ , weil gilt:

$$\det[\underline{P}_e] = e_0 (e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = e_0.$$

Deshalb sollte der Drehwinkel von der Istorientierung zur Sollorientierung nicht in der Nähe von  $\pm 180^\circ$  liegen. Er kann aber durch Ermittlung der ersten Parameter von  $\underline{d}_e^{<0>}$  überwacht werden. Wenn  $\underline{d}_{e0}$  gegen Null geht, kann die Orientierungsabweichung vorläufig durch eine willkürliche Orientierungsabweichung (z.B.  $\theta = \pm 90^\circ$ ) ersetzt werden, um die Singularität zu vermeiden.

Das Problem der Singularität der Kartesischen Lageregelung bleibt dann nur bei der Singularität der Jacobimatrix, die ein inhärentes Problem von Robotern ist (s. Abschnitt 3.3).

### 5.3.3 Algorithmus

Die Kartesische Lageregelung kann mit einem digitalen Prozessor realisiert werden. Der Rechenalgorithmus ist im folgenden zusammengestellt:

Schritt 1.  $\underline{r}_d^{<0>}$ ,  $\dot{\underline{r}}_d^{<0>}$ ,  $\ddot{\underline{r}}_d^{<0>}$ ,  $\underline{d}_{oe}^{<0>}$ ,  $\underline{\omega}_d^{<0>}$ ,  $\underline{\alpha}_d^{<0>}$  sowie gemessene Werte von  $\underline{q}$  und  $\dot{\underline{q}}$  eingeben.

Schritt 2.  $\underline{r}_c(\underline{q})$ ,  $\underline{J}_r \dot{\underline{q}}$ ,  $\underline{J}_e \dot{\underline{q}}$ ,  $\dot{\underline{J}} \dot{\underline{q}}$  berechnen.

Schritt 3. Mit Hilfe der Gln.(5.15) und (5.16)  $\underline{\dot{e}}_r$  und  $\ddot{\underline{e}}_r$  berechnen.

Schritt 4.  $\underline{c}_{oe}^{<0>}$  berechnen (s. Anhang A.4).

Schritt 5. Mit Hilfe der Gln.(5.19), (5.21) und (5.23)  $\underline{d}_{ce}^{<0>}$ ,  $\underline{c}_{ce}^{<0>}$ ,  $\underline{\xi}_e$  und  $\underline{P}_e^{-1}$  berechnen.

Schritt 6. Mit Hilfe der Gln.(5.28) bis (5.30)  $\underline{v}(t)$  berechnen.

Schritt 7.  $\left\{ \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & 2 \underline{P}_e^{-1} \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \ddot{\underline{r}}_d^{<0>} \\ \underline{\xi}_e \end{bmatrix} - \underline{v}(t) \right) - \dot{\underline{J}} \dot{\underline{q}} \right\}$  berechnen.

Schritt 8. Durch Verwendung des Inversionsverfahrens der Jacobimatrix auf die Gl.(5.27)  $\ddot{\underline{q}}^*$  berechnen (s. Kapitel 3);  
dann  $\ddot{\underline{q}}^*$  ausgeben.

Die Ableitung der Jacobimatrix  $\dot{\underline{J}}$  kann man direkt aus der symbolischen Form der Jacobimatrix  $\underline{J}$  (s. Kapitel 3) herleiten. Eine Alternative ist,  $\dot{\underline{J}} \dot{\underline{q}}$  mit dem im Abschnitt 4.1 erwähnten rekursiven Algorithmus (s. Bild 4-2) zu berechnen. Sei  $\underline{\ddot{q}}$  mit  $\underline{0}$  ersetzt, sind die lineare Beschleunigung und Winkelbeschleunigung des Endeffektors gleich  $\dot{\underline{J}} \dot{\underline{q}}$ .

Im Algorithmus betragen die arithmetischen Operationen  $17M + 10A + 5s/c$  in Schritt 4 für den Stanford-Arm und  $78M + 62A$  in Schritt 5 für allgemeine Fälle, mit "M" als Multiplikation, "A" als Addition, "s/c" als ein Paar von sin und cos. Die anderen Schritte benötigen fast die gleichen Operationen wie die Gelenk-Lageregelung.

## 5.4 Konvergenzanalyse

Das geregelte System läßt sich durch die Differentialgleichungen dritter Ordnung der Gl.(5.31) beschreiben. Den Sachverhalt, daß der permanente Schleppfehler theoretisch gleich null bei allen Führungsarten ist, kann man anschaulich aus der Gleichung ersehen. Dieses bietet sich an, damit der Regler bei dem angemessenen Entwurf der Parametermatrizen ein ideales Führungsverhalten erzielt.

Die Robustheitsuntersuchung gegen Modellunsicherheiten für die Gelenk-Lageregelung, die durch eine Form ähnlich wie die Gl.(5.31) beschrieben werden kann, erfolgte in [44, 64] und kann auf die Kartesische Regelung erweitert werden [64]. Die Schätzung der Robustheit wird in der Literatur [64] sehr empfohlen.

Der I-Anteil des PID-Reglers dient zur Verbesserung des Störverhaltens [33]. Patzelt [51] zeigt aber auch, daß der PID-Regler in der Praxis hochfrequente Störungen stärker hervorhebt als der PD-Regler, weil infolge der Verzögerungen in den Meß- und Stellgliedern die Zeitkonstanten des PID-Reglers aus Stabilitätsgründen größer zu wählen sind und daß dieser Sachverhalt auch die Hinzunahme weiterer Integrierer zur stärkeren Unterdrückung niederfrequenter Störungen einschränkt. Der Einfachheit und physikalischer Anschaulichkeit halber wird nur der PD-Regler behandelt, d.h.  $\underline{K_I} = \underline{0}$  in Gl.(5.28). Die explizite Lösung von Gl.(5.31) lautet dann [8, 14]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\epsilon}}(t) \\ \underline{\epsilon}(t) \end{bmatrix} = \exp(\underline{A} (t-t_0)) \begin{bmatrix} \dot{\underline{\epsilon}}(t_0) \\ \underline{\epsilon}(t_0) \end{bmatrix}, \quad (5.32)$$

wobei  $t_0$  Anfangszeit ist, und

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\underline{K_D} & -\underline{K_P} \\ \underline{I} & \underline{0} \end{bmatrix}.$$

Das Gesamtsystem ist asymptotisch stabil, wenn, und nur wenn alle Eigenwerte von  $\underline{A}$  einen negativen Realteil haben. In der Praxis werden  $\underline{K}_D$  und  $\underline{K}_P$  häufig als solche Diagonalmatrizen eingesetzt:

$$\underline{K}_D = \begin{bmatrix} k_{Dr}\underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & k_{De}\underline{I} \end{bmatrix}, \quad \underline{K}_P = \begin{bmatrix} k_{Pr}\underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & k_{Pe}\underline{I} \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

mit  $k_{Dr}$ ,  $k_{De}$ ,  $k_{Pr}$ ,  $k_{Pe}$  als reellen Konstanten. Anschließend wird die Konvergenzanalyse der Kartesischen Lageregelung zur Analyse eines Verzögerungsglieds zweiter Ordnung (VZ<sub>2</sub>-Glied) vereinfacht, das ein übliches physikalisches System ist. Nach der linearen Regelungstheorie [14] ist die hinreichende und notwendige Bedingung der Stabilität bei der Regelung mit den Parametermatrizen der Gl.(5.33), daß die vier Koeffizienten positiv sind.

Bei der Betrachtung der mathematischen Lösung der Gl.(5.32) sei die Sprungantwort der Position des Endeffektors durch die Kartesische Lageregelung eine gerade Linie von der Istposition zur Sollposition, während die Orientierungssprungantwort eine Drehung um eine stationäre Achse sei, da  $\underline{d}_{cu}^{<0>}$  während des Regelungsangs stationär bleibt.

Wenn gilt:  $k_{Dr} / 2\sqrt{k_{Pr}} \geq 1$  und  $k_{De} / 2\sqrt{k_{Pe}} \geq 1$  (d.h. ein aperiodischer Grenzfall bzw. ein aperiodischer Fall vorliegt), wird ein überschwingfreies Führungsverhalten für ein bestimmtes Gebiet der Anfangsabweichungen  $\underline{\epsilon}(t_0)$  und  $\dot{\underline{\epsilon}}(t_0)$  erzielt. Dazu wird auf Abschnitt 3.4.4 in [50] verwiesen.

Der Endeffektor nähert sich in diesem Fall der Werkstückbahn kollisionsfrei an. Im Gegensatz dazu kann der Endeffektor bei der Gelenk-Lageregelung mit der Werkstückbahnebene noch kollidieren, obwohl dazu nur geringe Möglichkeit besteht, weil statt der Endeffektorbahn die Gelenkverrückungen geregelt werden.

Das Konvergenzverhalten der Orientierungsabweichung soll nochmals ausführlich betrachtet werden. Aus der Kenntnis des  $VZ_2$ -Gliedes kann man sich vorstellen, daß der Regler mit  $k_{pe} > 0$  und  $k_{de} > 0$  den Wert von  $\sin(\theta/2)$  so auf Null verringert, wie das Störverhalten eines  $VZ_2$ -Gliedes bei sprunghafter Änderung der Störgröße. In Bild 5-4 sind die Konvergenztrends der Orientierungsabweichung mit Pfeilen aufgezeigt. Offensichtlich ist  $\theta = \pm\pi$  der Zweigpunkt von zwei möglichen Konvergenzwegen. Dieser Punkt ist gleichzeitig ein singulärer Punkt. Diese Betrachtung erlaubt eine einfache Interpretation der Singularität von  $\underline{p}_e^{-1}$ .

Nimmt man bei der Kartesischen Lageregelung statt der Eulerschen Parameter die Orientierungsabweichungsfunktion von Luh et al. ( $\sin\theta \underline{d}_{cu}^{<0>}$ ), so erhält man das Ergebnis in [17], so daß die Konvergenztrends genauso wie oben erwähnt geschätzt und in Bild 5-5 dargestellt werden können. Aufgrund von Bild 5-5 läßt sich jedoch vermuten, daß  $\theta = \pm\pi/2$  bei der Orientierungsabweichungsfunktion von Luh et al. singuläre Punkte seien. Der Sachverhalt, daß die Orientierungsabweichung bei der sprunghaften Führungsgröße von  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$  nahe  $\theta = \pi$  kommt, schränkt den Arbeitsraum in  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$  ein. In der Tat kann man genau beweisen, daß die singulären Punkte der Kartesischen Lageregelung mit ( $\sin\theta \underline{d}_{cu}^{<0>}$ ) als Orientierungsabweichung  $\theta = \pm\pi/2$  und  $\theta = \pm\pi$  sind. Aus dem Vergleich kann man die Überlegenheit der Eulerschen Parameter bei der Orientierungsabweichung deutlich erkennen.

Die Zeitkonstante des Gesamtsystems bestimmt das Konvergenzverhalten. Ist der minimale Wert der Zeitkonstanten angegeben, so empfiehlt sich der aperiodische Grenzfall, der wegen des Doppelpols der schnellste konvergente überschwingfreie PD-Regler ist. Die minimale sowie die maximale Grenze der Reglerzeitkonstante werden von verschiedenen Faktoren beeinflusst:

— die maximale Grenze von:

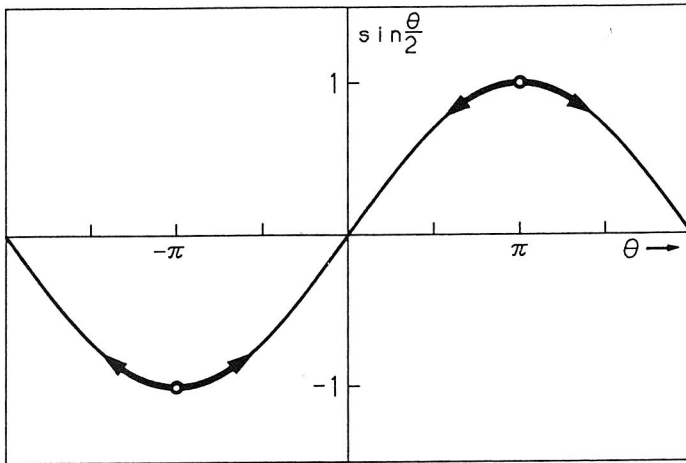


Bild 5-4. Konvergenztrends der Orientierungsabweichung mit den Eulerschen Parametern

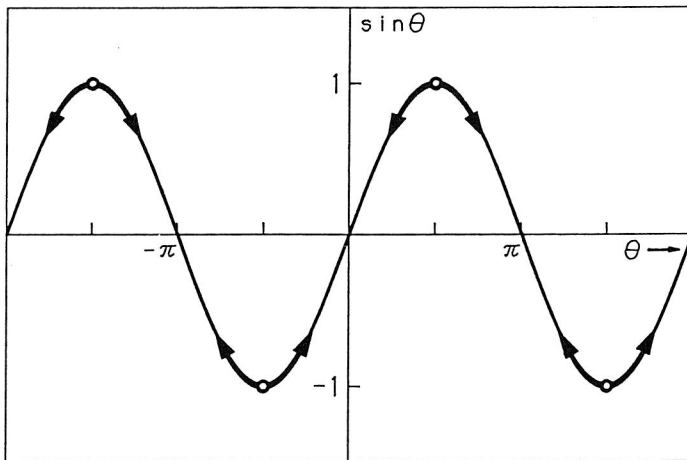


Bild 5-5. Konvergenztrends der Orientierungsabweichung mit  $(\sin \theta \underline{u})$

- Konvergenzgeschwindigkeit,
- Robustheit;
- die minimale Grenze von:
  - Beschränkung der Antriebskräfte,
  - Abtastzeit,
  - mechanische Resonanzstelle.

Die Verkleinerung der Zeitkonstanten führt zu einer Erhöhung der Robustheit [11, 50], daneben nachteilig auch zur Vergrößerung der Antriebskräfte, weil gleichzeitig die Stellbeschleunigungen erhöht sind. Die endlichen Antriebskräfte verhindern eine unendliche Verkleinerung der Zeitkonstanten.

Wegen der kritischen Stabilitätsbedingung ist die Resonanzüberhöhung zu vermeiden. Das oben erwähnte Robotermodell geht von starren Körpern aus. Die mechanische Elastizität der Glieder und die Getriebeelastizität werden vernachlässigt. Zur Erfüllung der Stabilitätsbedingung muß die Reglerzeitkonstante weit von den Resonanzstellen der mechanischen Teile entfernt sein. Ein Erfahrungskriterium sei:

$$T > \frac{f_s}{2\pi w_r}, \quad (5.34)$$

wobei  $T$  die Reglerzeitkonstante ist,  $w_r$  die minimale Resonanzstelle in Hz,  $f_s$  der Sicherheitsfaktor. Als Sicherheitsfaktor wird für eine gut gedämpfte Konstruktion Zwei gewählt [39], sonst empfiehlt sich es, Drei zu nehmen [57].



Bei kleineren Zeitkonstanten verändert sich das Führungsverhalten schneller; es ist dann erforderlich, die Abtastzeit zu verkleinern. Wenn umgekehrt die Abtastzeit nicht klein genug zur rechtzeitigen Berücksichtigung der dynamischen Änderung des geregelten Systems durch den Regler ist, wird ein gutes Konvergenzverhalten nicht mehr gesichert. Dieser Punkt wird im nächsten Abschnitt wieder aufgegriffen.

## 5.5 Simulation

Im folgenden Abschnitt wird die Simulation der Kartesischen Lageregelung mit den Eulerschen Parametern als Orientierungsabweichung durchgeführt, um die obige Theorie zu bestätigen. Zur Simulation steht der Stanford-Arm zur Verfügung, dessen technische Daten in [51] aufgeführt und in Tabelle 5-1 (vgl. Bild 2-6) erneut dargestellt sind.

Die Anfangskonfiguration des Stanford-Arms (s. Bild 5-6) bleibt ruhig in:

$$\underline{r}_c^{<0>} = (0,6447\text{m}, \quad -0,1529\text{m}, \quad -0,2554\text{m}),$$

$$[\underline{n}_c^{<0>} \quad \underline{s}_c^{<0>} \quad \underline{a}_c^{<0>}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

oder in einer Form der Eulerschen Parameter:

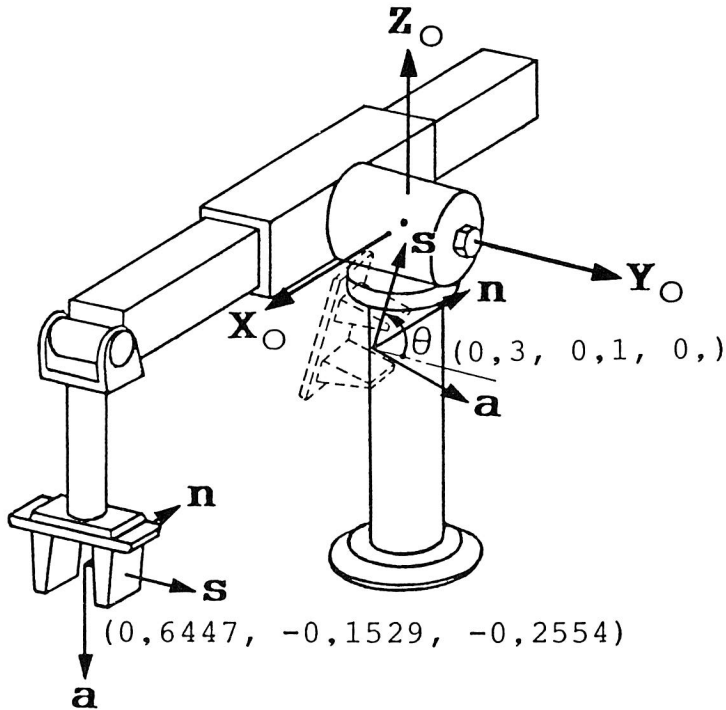
$$\underline{c}_{oe}^{<0>} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die sprungförmigen Führungsgrößen sind:

**Tabelle 5-1.** Technische Daten des Stanford-Arms

Gelenk (Typ)	$\theta'$	$\beta$	b (m)	d' (m)	Masse (kg)	Schwerpunkt (m)			Trägheitstensor (kg m <sup>2</sup> )		
						$c_x$	$c_y$	$c_z$	$J_{xx}$	$J_{yy}$	$J_{zz}$
1 (R)	0	0	0	0	9,29	0	0,1105	0,0175	0,276	0,255	0,71
2 (R)	90°	90°	0	0,1529	5,01	0	0	-0,1054	0,108	0,018	0,1
3 (T)	0	90°	0	1,289	4,25	0	0	-0,6447	2,51	2,51	0,006
4 (R)	0	0	0	0	1,08	0,0092	0,0054	0	0,002	0,001	0,001
5 (R)	-90°	90°	0	0	0,63	0	-0,0566	0	0,003	0,003	0,0004
6 (R)	0	90°	0	0	0,51	0	0	0,1554	0,013	0,013	0,0003

$h_7 = 0,2554\text{m}$



**Bild 5-6.** Anfangskonfiguration des Stanford-Arms bei der Simulation

$$\underline{r}_d^{<o>} = (0,3m, \quad 0,1m, \quad 0,0m),$$

$$\begin{aligned} [\underline{n}_d^{<o>} \quad \underline{s}_d^{<o>} \quad \underline{a}_d^{<o>}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} [\underline{n}_c^{<o>} \quad \underline{s}_c^{<o>} \quad \underline{a}_c^{<o>}] \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

oder in einer Form der Eulerschen Parameter:

$$\underline{d}_{oe}^{<o>} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{bmatrix}. \quad (5.35)$$

Damit ist eine Drehung von  $\theta$  um  $\underline{u}^{<o>} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ . Die Koeffizienten der Parametermatrizen der Gl.(5.33) lassen sich zu  $k_p = 100$ ,  $k_D = 20$  wählen, was zu einem aperiodischen Grenzfall des PD-Reglers mit der Zeitkonstante von 0,1s führt. Falls andere Angaben fehlen, wird die Abtastzeit als 0,01s angenommen. Die Simulation wird für vier Werte von  $\theta = \pi/4$ ,  $\pi/2$ ,  $0,95\pi$  und  $5\pi/4$  durchgeführt.

Aus Bild 5-7 kann man das überschwingungsfreie Führungsverhalten ablesen. Das Zusammentreffen der drei Komponenten der Positionsabweichung in einer dimensionslosen Darstellung,  $(\underline{\epsilon}_r(t) / \underline{\epsilon}_r(0))$ , bestätigt, daß die Sprungantwort der Position eine Gerade ist. Andererseits bleiben die letzten zwei Eulerschen Parameter bei der Orientierungsantwort immer nahe Null. Dieser Sachverhalt zeigt, daß die Sprungantwort der Orientierung eine Drehung um eine stationäre Achse ist.

Bei der sprungförmigen Führungsgröße  $\theta = \pi/2$  treffen die Komponenten der dimensionslosen Positionsabweichung zwar nicht mehr immer zusammen, nähern sich aber noch sehr eng aneinander an (s. Bild 5-8). Die Ursache liegt in der Erhöhung der Antriebskraft des ersten Gelenks. Das Führungsverhalten ist noch gut und kann akzeptiert werden.

Die Verformung des überschwingfreien Führungsverhaltens wächst mit  $\theta = \pi/2$  bis zu  $\theta = \pi$  an. In der Nähe des singulären Punktes, z.B. bei  $\theta = 0,95\pi$ , taucht sogar die Überschwingung in der Positionsantwort unerwünscht auf (s. Bild 5-9). Dies ist auf die außergewöhnliche Erhöhung der Antriebskräfte zurückzuführen, die den Singularitätsphänomenen entspricht. Die ziemlich großen Antriebskräfte haben zur Folge, daß die Impulse innerhalb einer Abtastperiode groß genug sind, die dynamische Bewegung des Roboters nachhaltig zu beeinflussen. Der Regler kann wegen der zu großen Abtastzeit eine kleine dynamische Änderung nicht mehr rechtzeitig berücksichtigen und darauf reagieren. Wenn die Abtastzeit genügend verkleinert wird, um die dynamische Änderung rechtzeitig zu berücksichtigen, bleibt das Führungsverhalten des aperiodischen Grenzfalls noch gesichert, was Bild 5-10 mit der Abtastzeit von 0,002s zeigen soll. Auf jeden Fall muß die Singularität  $\theta = \pi$  unbedingt vermieden werden.

Zuletzt wird die Simulation für  $\theta = 5\pi/4$  durchgeführt. In diesem Fall nähert sich der erste Eulersche Parameter bei der Orientierungsantwort an -1 an (s. Bild 5-11). Der Verlauf von  $\theta$  liegt im Bereich von  $5\pi/4$  bis zu  $2\pi$ . Dies stimmt völlig mit dem oben erwähnten Konvergenztrend überein. Tatsächlich verhält sich die Konvergenz für  $\theta = -3\pi/4$  auch gleich wie die für  $\theta = 5\pi/4$ . Das Ergebnis zeigt, daß die Konvergenztrends unabhängig vom definierten Bereich der Eulerschen Parameter sind. Ob die Eulerschen Parameter in  $-\pi < \theta \leq \pi$  definiert werden oder in  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , ist ohne Belang. Das Konvergenzverhalten für beide Bereiche stimmt physikalisch überein. Aus diesem Grunde wird in der Praxis

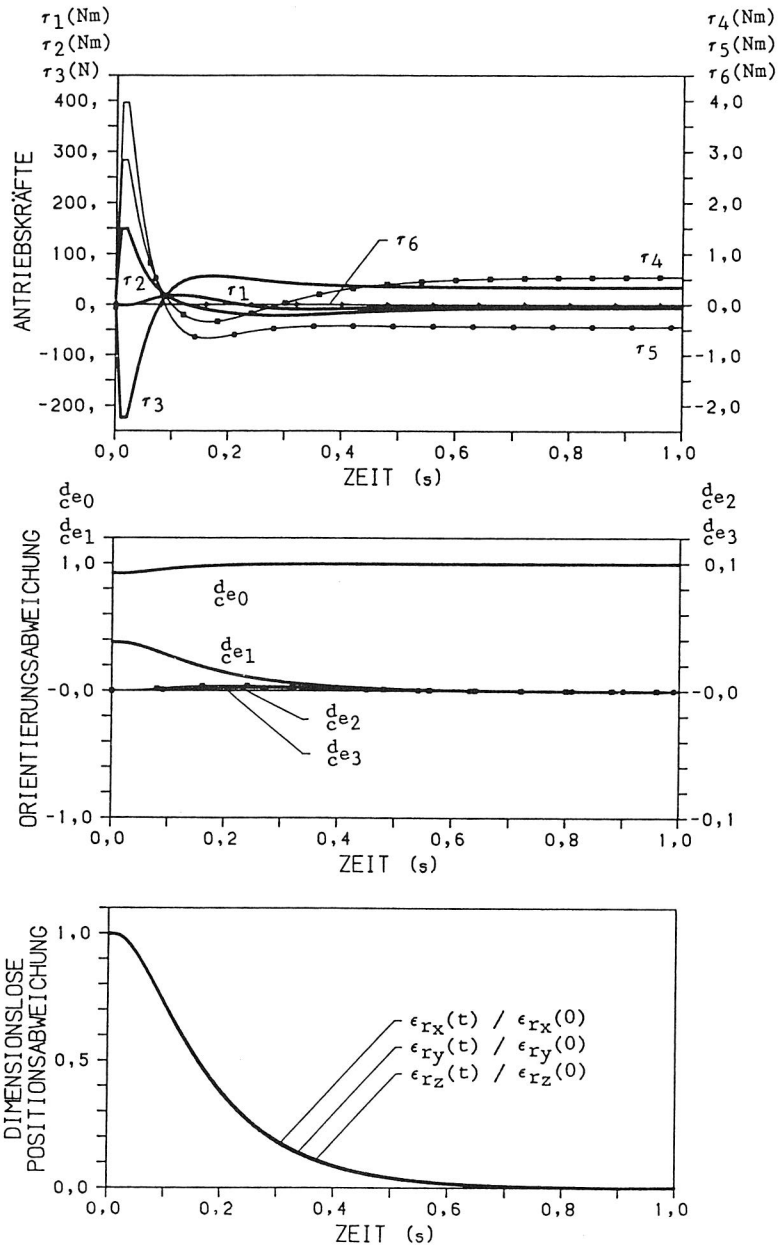


Bild 5-7. Sprungantwort bei der Simulation mit  $\theta = \pi/4$

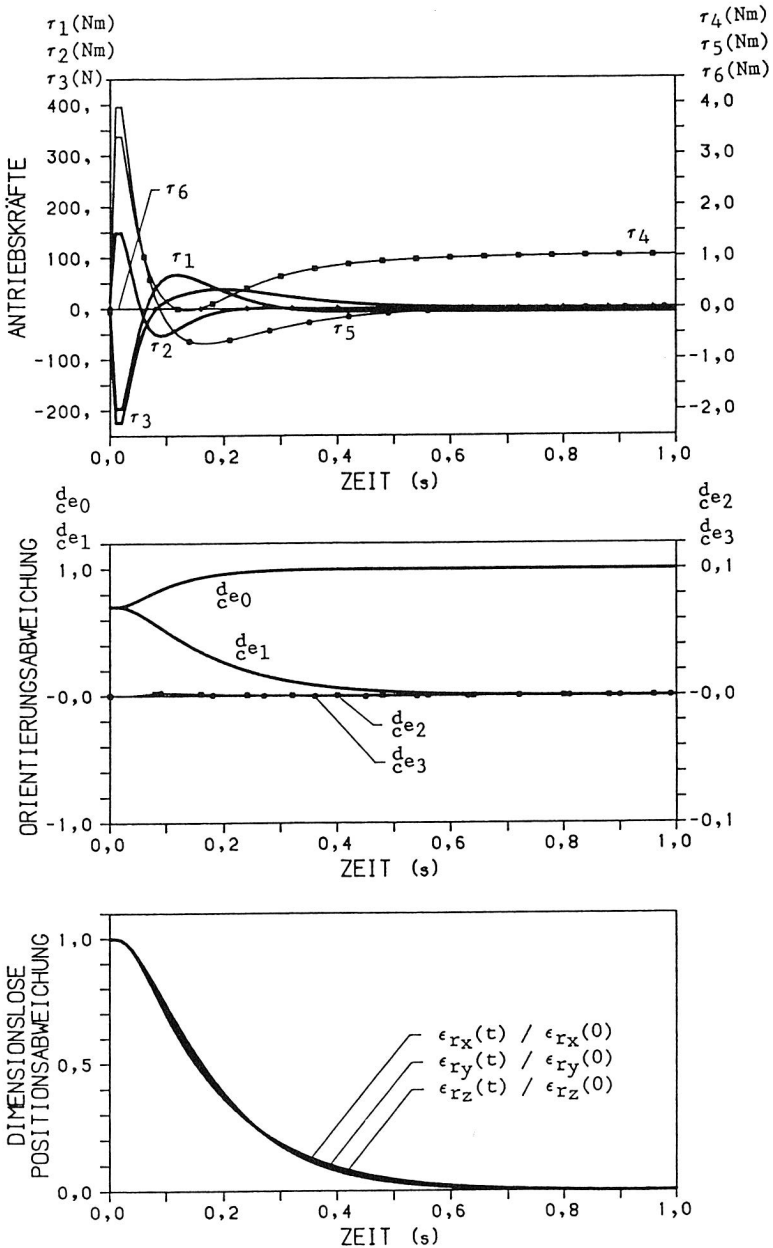


Bild 5-8. Sprungantwort bei der Simulation mit  $\theta = \pi/2$

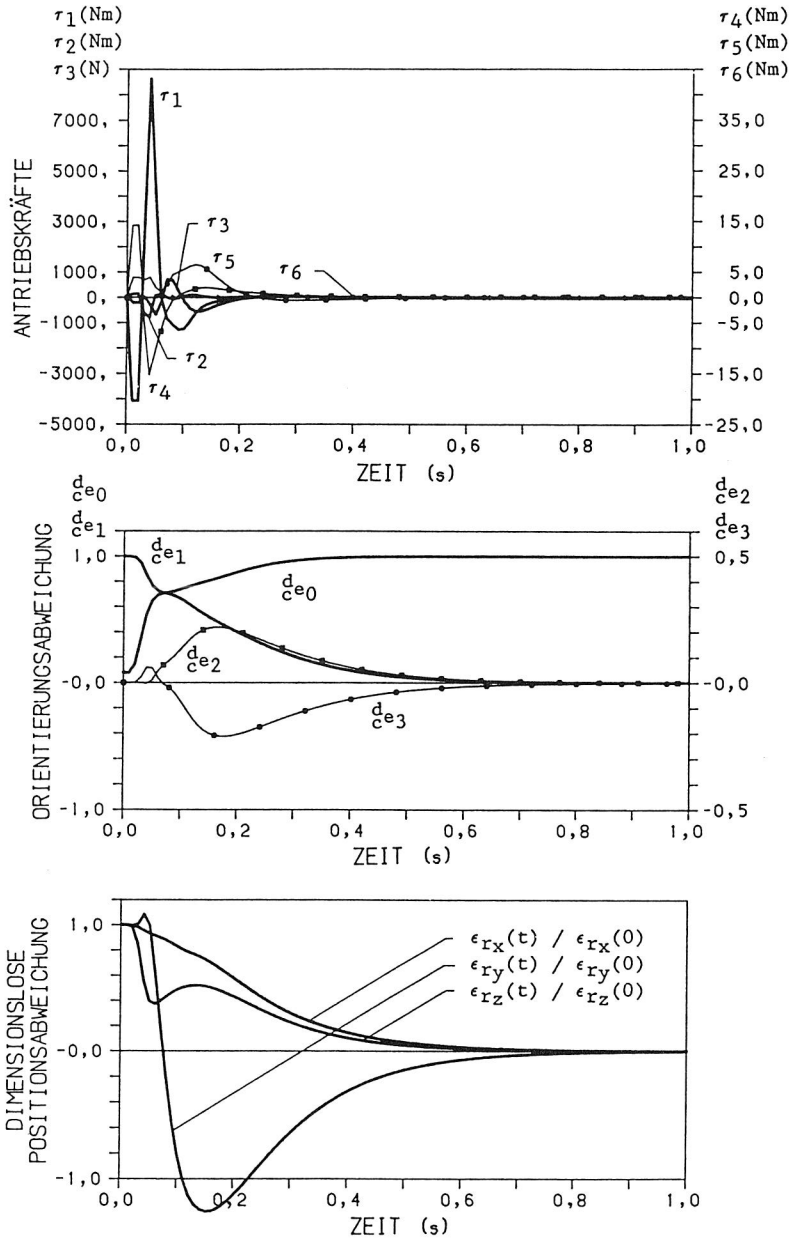


Bild 5-9. Sprungantwort bei der Simulation mit  $\theta = 0,95\pi$

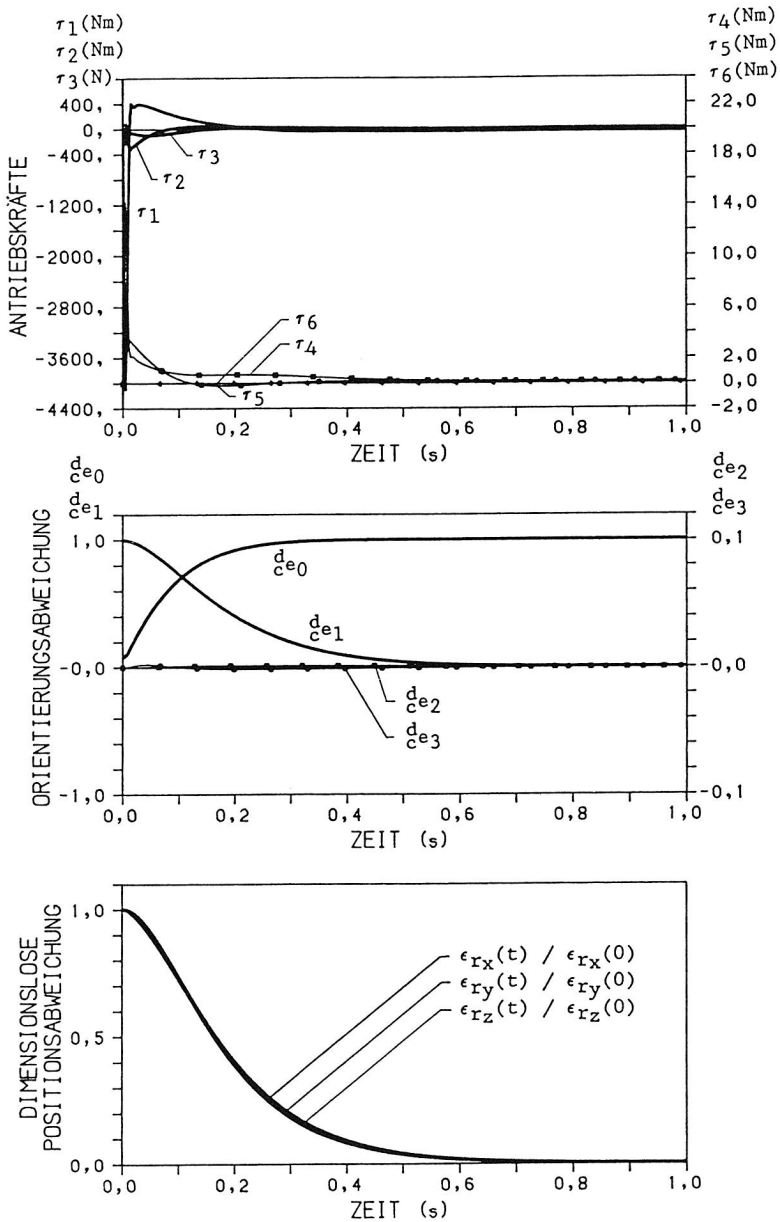


Bild 5-10. Sprungantwort bei der Simulation mit  $\theta = 0,95\pi$  aber mit der Abtastzeit von 0,002s



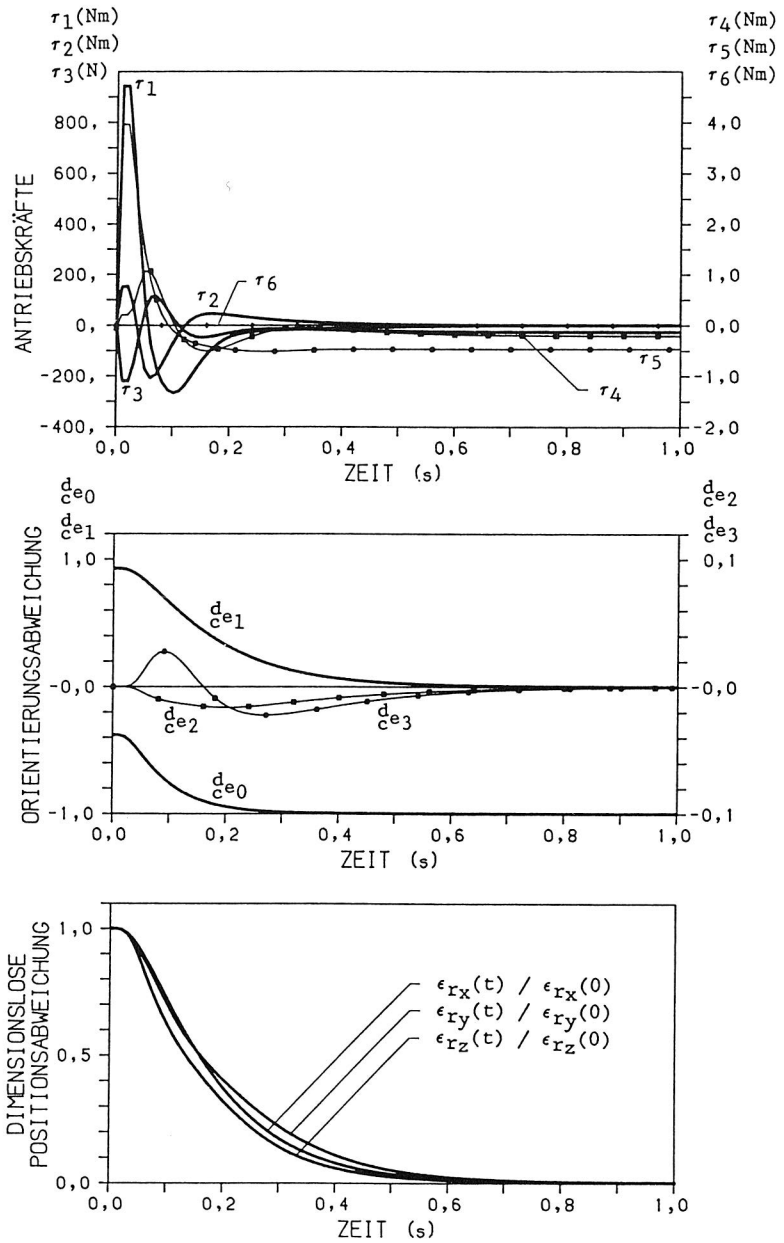


Bild 5-11. Sprungantwort bei der Simulation mit  $\theta = 5\pi/4$

der Wert des ersten Eulerschen Parameters nicht eingeschränkt, genauso der definierte Bereich nicht beschränkt. Es läßt sich auf zwei Möglichkeiten eine Orientierungsabweichung darzustellen. Dazu trifft der Regler die Entscheidung.

## 5.6 Lageregelung bei begrenzten Antriebskräften

Im letzten Abschnitt wurde dargelegt, daß die Überschwingfreiheit des Bahnverlaufes des Endeffektors bei der angemessenen Einstellung der Zeitkonstante des PD-Reglers unter der Voraussetzung unbeschränkter Antriebskräfte (d.h. Stellgrößen) gewährleistet wird. Bei allen Robotern unterliegen jedoch die Antriebskräfte Begrenzungen.

Das überschwingfreie Gebiet des PD-Reglers mit einem Doppelpol  $-1/T$  bei einem linearen Eingrößensystem ist unter der Voraussetzung unbeschränkter Stellgrößen [50]:

$$T \dot{\epsilon}(t_0) + \epsilon(t_0) \geq 0 \text{ und } \epsilon(t_0) \geq 0 \quad (5.37)$$

oder

$$T \dot{\epsilon}(t_0) + \epsilon(t_0) \leq 0 \text{ und } \epsilon(t_0) \leq 0, \quad (5.38)$$

wobei  $\epsilon$  die Abweichung,  $t_0$  die Anfangszeit ist. Mit Einschränkung der Grenze der Stellgröße verkleinert sich das überschwingfreie Gebiet drastisch [50].

Das entkoppelte Robotersystem besitzt bei unbeschränkten Antriebskräften das gleiche überschwingfreie Gebiet wie ein lineares Eingrößensystem. Wenn die Begrenzungen der Antriebskräfte berücksichtigt werden, kann das überschwingfreie Gebiet des Robotersystems wegen der Nichtlinearität kaum analysiert werden. Darin liegt die Schwierigkeit bei der Anwendung der Lageregelung. In der Literatur wurden folgende Maßnahmen für die Lageregelung von Robotern

vorgeschlagen:

- die strukturvariable Methode [49, 50],
- die Optimal-Entscheidungsstrategie [62],
- die Geschwindigkeitsbegrenzung.

Die strukturvariable Methode besteht in der Kombination des PD-Reglers und des linearen, zeitoptimalen Reglers. Der letzte Regler vergrößert bei derselben Stellgrenze das überschwingfreie Gebiet des PD-Reglers etwa um das Zehnfache, aber seine Stellgröße "rattert" an der Schaltkennlinie. Zur Vermeidung des Ratterns wird in Ursprungsnähe der PD-Regler durch einen kontinuierlichen Übergang für die Stellgröße zwischen dem PD-Regler und dem zeitoptimalen Regler ersetzt. Darauf basiert der von Patzelt [49, 50] entwickelte strukturvariable Regler für die Gelenksteuerung von Robotern. Dabei sind die Gelenkbeschleunigungen als Stellgrößen anzusehen; vernachlässigt wurde, daß die Antriebskräfte (d.h. die richtige Stellgröße von Robotern) nichtlineare Funktionen der Gelenkbeschleunigungen sind.

Die Optimal-Entscheidungsstrategie [62] ist eine Zeitpunkt-Optimal-Regelung, die die Abweichungen der Zeitableitungen der Zustandsvariablen unter Berücksichtigung der Stellgrenze am einzelnen Abtastzeitpunkt auf ein Minimum reduziert. Bei der Gelenk-Lageregelung von Robotern bezeichnen die Zustandsvariablen die Gelenkverrückungen und die Gelenkgeschwindigkeiten. Zuvor wurden bei den sprungförmigen Führungsgrößen Verläufe der Gelenkverrückungen als gewisse Funktionen angenommen; z.B. kann eine Sprungantwort des PD-Reglers bei denselben Führungsgrößen als Sollführungsgrößen für den Regler mit der Optimal-Entscheidungsstrategie angesehen werden. Neben der Gewährleistung des überschwingfreien Führungsverhaltens enthält diese Strategie noch den Vorteil [62], daß sie mit einem beliebigen Regelungsverfahren, nicht nur mit dem PD-Regler, verbunden werden

kann; ein Beispiel mit der sogenannten Gleitmode-Methode wurde in [59] dargelegt. Den Vorteilen steht ein hoher Rechenaufwand zum Errechnen der Massenmatrix an jedem Abtastzeitpunkt gegenüber, zu deren Komplexität auf [38, 72] verwiesen wird.

Eine einfache Strategie zur Bahnplanung einer geraden Linie zwischen zwei Punkten im Kartesischen Raum besteht darin, die Linie in folgende drei Abschnitte zu unterteilen: den Beschleunigungsabschnitt, den Abschnitt der maximalen konstanten Geschwindigkeit und den Verlangsamungsabschnitt. Da bei dieser Aufgabe die Sollbeschleunigung und -geschwindigkeit des Endeffektors gleich null sind, wird das durch den Kartesischen PD-Regler geregelte System gemäß den Gln.(5.31) und (5.33) folgendermaßen beschrieben:

$$\ddot{\underline{r}}_C = -k_{Dr}\dot{\underline{r}}_C + k_{Pr}(\underline{r}_d - \underline{r}_C). \quad (5.39)$$

Die Geschwindigkeit des Endeffektors läßt sich durch [31]

$$\ddot{\underline{r}}_C = -k_{Dr}(\dot{\underline{r}}_C - V(\underline{r}_d - \underline{r}_C)) \quad (5.40)$$

mit

$$V = \min \left[ 1, \frac{\frac{V_{\max}}{k_{Pr}}}{\sqrt{(\underline{r}_d - \underline{r}_C)^2}} \right] \quad (5.41)$$

unter dem maximalen Wert  $V_{\max} > 0$  beschränken. Wenn die Norm des Teiles  $k_{Pr} (\underline{r}_d - \underline{r}_C) / k_{Dr}$  der Führungsgröße größer als  $V_{\max}$  ist, steuert der Kartesische Regler (s. Gl.(5.27)) mit  $\underline{v}(t) = \ddot{\underline{r}}_C$  (d.h. der Gl.(5.40)) statt mit der Gl.(5.28) den Endeffektor zur Bewegung mit der maximalen Geschwindigkeit anstatt zum Erreichen der Sollposition an. Wenn die Geschwindigkeit des Endeffektors den maximalen Wert erreicht, bleibt sie konstant, bis diese Norm kleiner als  $V_{\max}$  ist. Danach verlangsamt der Regler die Bewegung des

Endeffektors bis zum Erreichen der Sollposition, genauso wie der normale PD-Regler mit der Gl.(5.28). Die Beschränkung der Geschwindigkeit des Endeffektors verhindert, daß zu große Führungsgrößen auftreten; damit verringern sich auch die Antriebskräfte.

Das Konzept der Geschwindigkeitsbegrenzung kann auch auf die Orientierungssteuerung ausgeweitet werden. Der Orientierungsteil der Gl.(5.31) läßt sich folgendermaßen umformulieren:

$$\ddot{\epsilon}_e = -k_{De} \left( \dot{\epsilon}_e - \frac{k_{Pe}}{k_{De}} \epsilon_e \right). \quad (5.42)$$

Statt der Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors wird hier die Orientierungsabweichung begrenzt. Bei Betrachtung der Gl.(5.42) ergibt sich als Folge der Begrenzung der Orientierungsabweichung, daß sich die Orientierungsführungsgröße verringert. Sei  $\theta_b$ ,  $0 < \theta_b < \pi$ , die Grenze der Orientierungsabweichung, wird sie in den folgenden vier Fällen überschritten (s. Bild 5-12):

1.  $\pi > \theta > \theta_b$ ,
2.  $2\pi - \theta_b > \theta > \pi$ ,
3.  $-\pi < \theta < -\theta_b$ ,
4.  $-2\pi + \theta_b < \theta < -\pi$ .

Für diese Fälle gilt immer:

$$|\dot{\epsilon}_{e0}| = \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| < \left| \cos \frac{\theta_b}{2} \right|. \quad (5.43)$$

Die Gl.(5.43) enthält das Kriterium, ob die Orientierungsabweichung die Grenze überschreitet. Wenn diese Ungleichheit

auftritt, sollen die die Orientierungsabweichung darstellenden Eulerschen Parameter erneut ersetzt werden durch:

$$d_{e0} = \begin{cases} \cos \frac{\theta_b}{2}, & \text{für } \cos \frac{\theta}{2} \geq 0, \\ -\cos \frac{\theta_b}{2}, & \text{für } \cos \frac{\theta}{2} < 0, \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\underline{d_{e<0>}} = \frac{\sin \frac{\theta_b}{2}}{\sqrt{\underline{d_{e<0>}} \cdot \underline{d_{e<0>}}}} \underline{d_{e<0>}} \quad (5.45)$$

mit

$$\underline{d_{e<0>}} = [d_{e1} \quad d_{e2} \quad d_{e3}]^T,$$

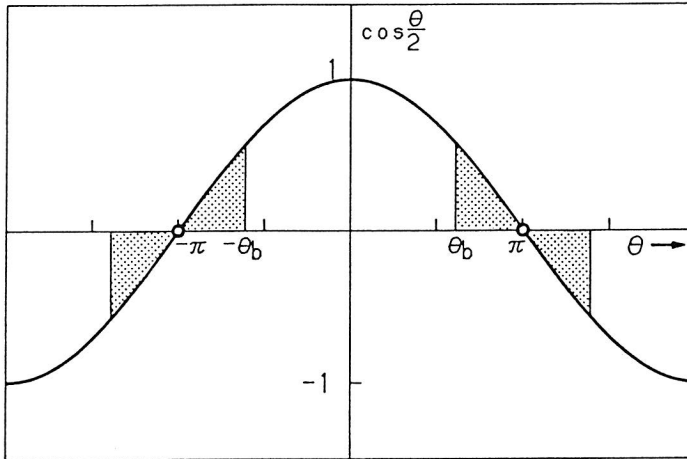


Bild 5-12. Darstellung der Begrenzung der Orientierungsabweichung in  $\cos(\theta/2)$

da sonst die Begrenzung der Orientierungsabweichung überschritten wird.

Die Bilder 5-13 und 5-14 zeigen die Simulationsergebnisse der Kartesischen Lageregelung mit der Begrenzung der Orientierungsabweichung am Beispiel des Stanford-Arms.

Die Positionsführungsgröße bleibt gleich der in Abschnitt 5.5 verwendeten, während die Orientierungsführungsgröße dagegen zwei sprungförmige Funktionen beinhaltet: jeweils im Zeitpunkt 0,0s mit  $\theta = \pi$  in der Gl.(5.35) und im Zeitpunkt 0,75s mit  $\theta = 0$ . Bei  $\theta_b = \pi/2$  tritt bei der Konvergenz nur im Vergleich mit der Konvergenz des Reglers ohne Stellbegrenzung eine sehr geringe Verzögerung auf, die Positionsantwort ist aber wegen der großen Antriebskräfte bei der zweiten sprungförmigen Führungsgröße etwas verformt. Das Führungsverhalten bei  $\theta_b = \pi/3$  wird im Gegensatz dazu ideal, obwohl die Konvergenzzeit verlängert ist.

Vor der Implementierung der Geschwindigkeits- und Orientierungsabweichungsbegrenzung müssen die Grenzen  $V_{\max}$  und  $\theta_b$  durch eine Offline-Programmierung unter Berücksichtigung der Antriebsgrenzen bestimmt werden — dieses wirkt sich nachteilig auf die Einfachheit dieses Konzeptes aus.

## 5.7 Schlußbemerkungen

In diesem Kapitel wurde die Kartesische Lageregelung auf der Basis der Meßsignale der Gelenkverrückungen entwickelt. Prinzipiell ist das Führungsverhalten der Kartesischen Lageregelung bei kleinen Führungsgrößen gleich dem der Gelenk-Lageregelung. Aber geringfügige Winkelabweichungen bei der Gelenk-Lageregelung können eine nichtvernachlässigbare Bahnabweichung im Kartesischen Weltkoordinatensystem herbeiführen. Im Gegensatz dazu kann die Genauigkeit der Bewegung von Robotern durch die Kartesische Lageregelung im ganzen Arbeitsraum, ausschließlich in der Nähe von

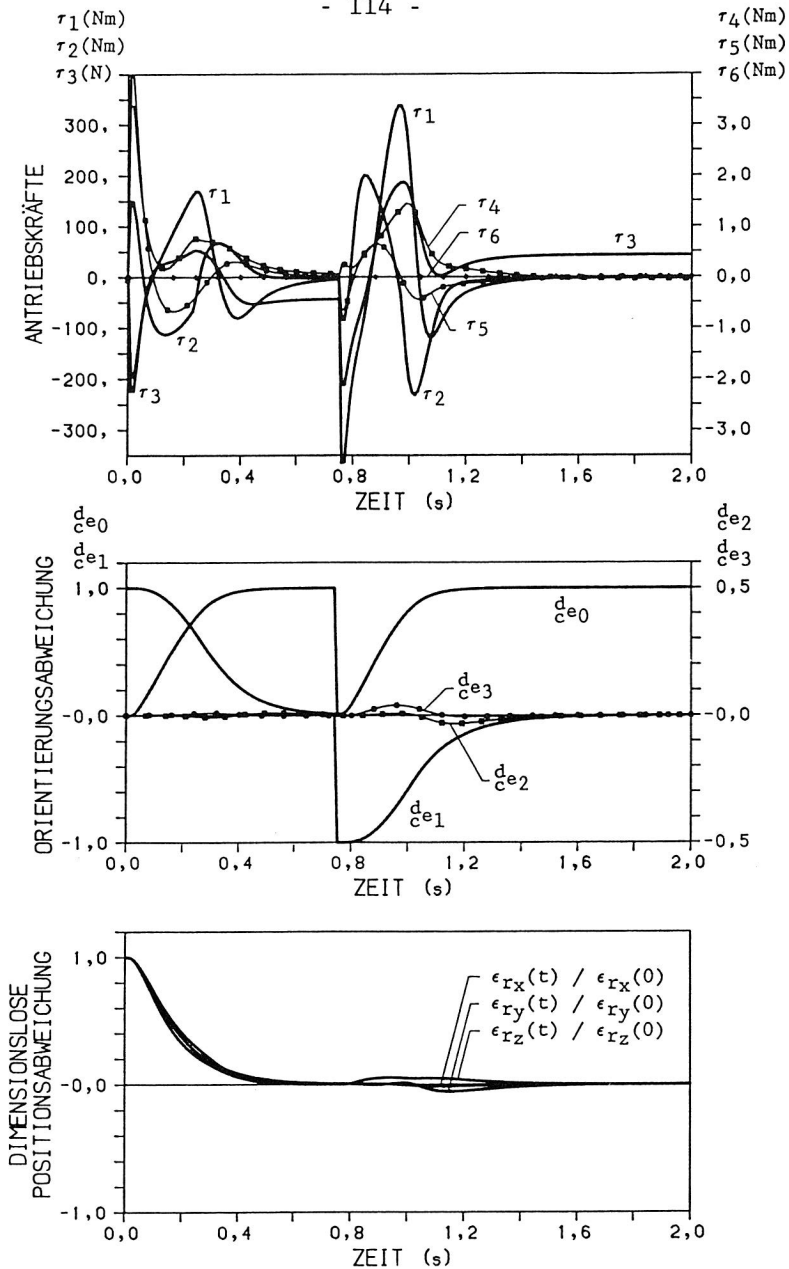


Bild 5-13. Antwort bei der Simulation der Kartesischen Lageregelung mit der Begrenzung der Orientierungsabweichung  $\theta_b = \pi/2$



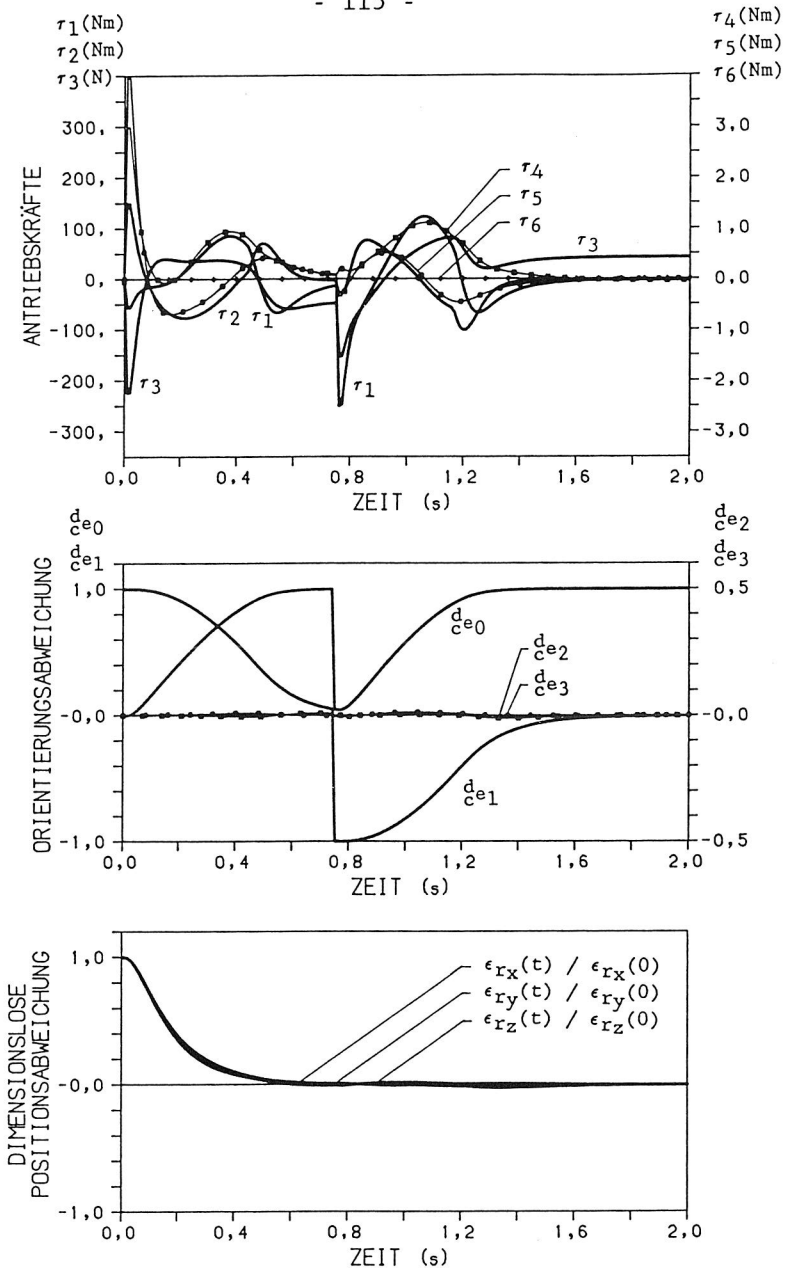


Bild 5-14. Antwort bei der Simulation der Kartesischen Lageregelung mit der Begrenzung der Orientierungsabweichung  $\theta_b = \pi/3$

kinematischen singulären Punkten, gleichbleiben.

Bei großen Führungsgrößen sorgt die Kartesische Lageregelung für eine geradlinige Positionsbahn und für eine Drehung um eine stationäre Achse bei der Orientierungsbahn. Damit ist ein überschwingfreies Konvergenzverhalten an die Ebene der Werkstückbahn erreichbar, während durch die Gelenk-Lageregelung nur ein überschwingfreies Konvergenzverhalten an einen Punkt möglich und die Laufbahn im Weltkoordinaten ungewiß ist.

Den Vorteilen der Kartesischen Lageregelung steht ein höherer Rechenaufwand gegenüber, der aber nun mit Hilfe eines Multimikroprozessorensystems gelöst werden kann.

Kuntze [33] behauptete, daß durch die Kartesische Lageregelung die Position und die Orientierung des Endeffektors unmittelbar im Weltkoordinatensystem gemessen und geregelt werden können unter Umgehung störender Nichtlinearitäten und Elastizitäten in den Antriebsachsen und Getrieben. Dieser Vorteil läßt sich aber erst dann ausschöpfen, wenn eine Einrichtung zur Messung der Position und Orientierung des Endeffektors zur Verfügung steht.

## 6 INDUSTRIEROBOTER MIT GESCHLOSSENEN KETTEN

### 6.1 Vorteile und Schwierigkeiten

In den vorherigen Kapiteln bezogen sich das dynamische Modell und das Modell der Kartesischen Lageregelung auf Industrieroboter mit einer einfachen offenen Kette. Es wird in Erwägung gezogen, ob die für eine offene Kette geltenden Modelle auch auf geschlossene Ketten anwendbar sind.

Auf dem Robotermarkt existieren schon verschiedene Industrieroboter, die mit einem geschlossenen Getriebe konstruiert sind. Damit kann auf das wenig steife Übersetzungsgetriebe zwischen einem Antrieb und einem Roboterglied verzichtet werden. Die Antriebe können im Unterkörper des Roboters unmittelbar am jeweiligen Getriebeglied der geschlossenen Schleife ohne Übersetzung installiert werden; die Glieder im Oberkörper des Roboters lassen sich über das geschlossene Getriebe antreiben. Solche Industrieroboter eignen sich besonders für das Punktschweißen und Handhabungsaufgaben mit schweren Teilen [67] und besitzen den Robotern mit einer offenen Kette gegenüber folgende Vorteile [4]:

- große Tragfähigkeit,
- hohe Steifigkeit,
- Verringerung der auftretenden Reibung,
- einfache Instandhaltung,
- hohe Genauigkeit in den Bewegungen.

Weil gewisse holonome Zwangsbedingungen bei einer geschlossenen Kette bestehen, unterscheidet sich die dynamische Analyse bei Robotern mit geschlossenen Ketten von der bei Robotern mit einer offenen Kette. Deshalb kann die in

Kapitel 4 erwähnte rekursive Newton-Eulersche Formulierung nicht unmittelbar auf Roboter mit geschlossenen Ketten angewendet werden. Zur Erweiterung dieser Formulierung auf Roboter mit geschlossenen Ketten muß zunächst die dynamische Beziehung zwischen offenen und geschlossenen Ketten ermittelt werden. Im folgenden werden das dynamische inverse System sowie die Bewegungsgleichungen von Robotern mit geschlossenen Ketten daraufhin untersucht.

## 6.2 Dynamisches Modell

### 6.2.1 Kräfte und Momente an den Gelenken einer geschlossenen Kette

Betrachtet wird eine geschlossene Kette, die genausoviele Antriebe wie Freiheitsgrade besitzt (d.h. keine redundanten Antriebe in der geschlossenen Schleife). Der Klarheit halber wird das Gelenk mit einem eigenen Antrieb ein *aktives Gelenk* genannt, das andere ein *passives*. Bild 6-1(a) zeigt das Kräftediagramm der geschlossenen Schleife nach dem Frei-machen derjenigen Gelenke, die die geschlossene Schleife an die äußeren Glieder anschließen. Darin stehen die physikalisch eingeprägten Kräfte bzw. Momente an der Schleife mit den Trägheitskräften bzw. -momenten und den Gewichten im Gleichgewicht. Wenn ein passives Gelenk in der Schleife geöffnet wird, erscheint die Schleife als zwei einfache offene Ketten, die die *virtuell geschnittene offene Kette* der geschlossenen Schleife genannt wird (s. Bild 6-1(b)). Gemäß dem dritten Newtonschen Axiom (die Wirkungen zweier Körper aufeinander sind stets gleich und von entgegengesetzter Richtung) sollen die Innenkräfte  $\pm \underline{f}$  und Innenmomente  $\pm \underline{t}$  in Bild 6-1(b) eingetragen werden, damit das System in Bild 6-1(b) äquivalent zum System in Bild 6-1(a) wird. Da die Summe von  $\pm \underline{f}$  bzw.  $\pm \underline{t}$  gleich null ist, können die Kräfte und Momente in Bild 6-1(b) in zwei Teile unterteilt werden, die jeweils im Gleichgewicht stehen. Sie bilden die Subsysteme 1 und 2 in Bild 6-1(c). Das Subsystem

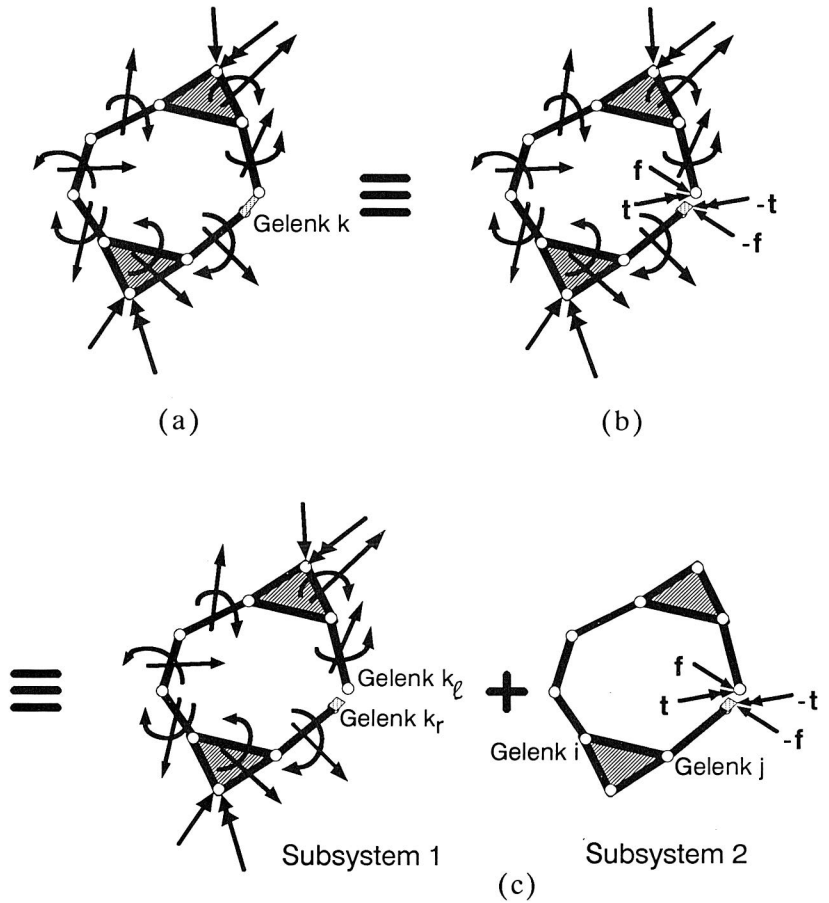


Bild 6-1. Äquivalente Kräftesysteme einer geschlossenen Kette

1 kann als eine *entsprechende geschnittene offene Kette* der geschlossenen Schleife angesehen werden, die sich gleich wie die Schleife bewegt, wenn auch an jedem passiven Gelenk ein Antrieb virtuell eingesetzt werden würde. Das Subsystem 2 wird auch das *System der Zwangskräfte* genannt, weil darin weder Trägheitskräfte und -momente noch am System physikalisch eingeprägte Kräfte und Momente existieren. Deswegen haben auch die Glieder außerhalb der geschlossenen Schleife nichts mit dem Subsystem 2 zu tun. Es läßt sich mit anderen Worten folgender Ansatz finden:

#### Ansatz 1:

Die Innenkräfte und -momente jeden Gelenks außerhalb der geschlossenen Schleife in einer geschlossenen Kette (Bild 6-1(a)) sind identisch mit denen in ihren entsprechenden geschnittenen offenen Ketten (Subsystem 1 in Bild 6-1(c)). ■

Die vorliegende Aufgabe vereinfacht sich dahingehend, die Beziehung der Antriebskräfte der Gelenke innerhalb der geschlossenen Schleife zwischen der geschlossenen Kette und ihrer entsprechenden geschnittenen offenen Kette zu untersuchen.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Antriebskraft jeden passiven Gelenks in der geschlossenen Kette (dem System in Bild 6-1(a)) wegen des fehlenden eigenen Antriebs gleich null ist, im Subsystem 1 bzw. 2 in Bild 6-1(c) aber ungleich null ist. Gründe dafür sind, daß die Antriebe an den passiven Gelenken im Subsystem 1 virtuell eingesetzt werden sollten, damit es sich gleich wie das originale System bewegt, und daß im Subsystem 2 die Antriebskräfte in allen Gelenken nötig sind, um die Zwangskräfte zu überwinden, damit die Konfiguration nicht verformt wird.

Die Antriebskräfte im Subsystem 1 werden mit  $\underline{r}_A^O$  und  $\underline{r}_P^O$  gekennzeichnet, die im Subsystem 2 mit  $\underline{r}_A^Z$  und  $\underline{r}_P^Z$ , wobei die Rechtsunterzeichen "A" das aktive Gelenk, "P" das passive Gelenk bedeuten. Wegen der Äquivalenz von dem originalen

System und dem gesamten System von den Subsystemen 1 und 2 erhält man:

$$\underline{r}_A^c = \underline{r}_A^o + \underline{r}_A^z, \quad (6.1)$$

$$\underline{r}_P^c = \underline{r}_P^o + \underline{r}_P^z = \underline{0}, \quad (6.2)$$

wobei das Rechtsoberzeichen "c" die geschlossene Kette bedeutet. Gemäß dem D'Alembertschen Prinzip (die gesamte virtuelle Arbeit des im Gleichgewicht stehenden Systems bleibt immer gleich null) wird die virtuelle Arbeit des Subsystems 2 folgendermaßen beschrieben:

$$(\underline{r}_A^z)^T \delta \underline{q}_A + (\underline{r}_P^z)^T \delta \underline{q}_P = 0, \quad (6.3)$$

da sich die Arbeiten der Zwangskräfte  $\pm \underline{f}$  bzw. -momente  $\pm \underline{t}$  gegenseitig aufheben. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Konfigurationen aller Systeme in Bild 6-1 immer identisch sind, genauso die wirklichen und die virtuellen Gelenkverrückungen. Deshalb sind die Rechtsoberzeichen an  $\underline{q}$  nicht mehr nötig. Die Bewegungen der passiven Gelenke sind nicht willkürlich, sondern den Zwangsbedingungen der geschlossenen Schleife unterworfen.

Eine holonome Zwangsbedingung kann implizit wie folgt beschrieben werden:

$$g_i(\underline{q}_A, \underline{q}_P, t) = 0. \quad (6.4)$$

Dies führt auch zu der differenzierten Form:

$$\frac{\partial g_i}{\partial \underline{q}_A} d\underline{q}_A + \frac{\partial g_i}{\partial \underline{q}_P} d\underline{q}_P + \frac{\partial g_i}{\partial t} dt = 0. \quad (6.5)$$

Wenn es ebensoviele unabhängige Zwangsbedingungen wie passive Gelenke gibt, wenn also  $[\partial g / \partial \underline{q}_P]^{-1}$  mit  $\underline{g} = [g_1 \dots g_m]^T$  existiert, dann geht die Gl.(6.5) über in:

$$\delta q_P = - \left[ \frac{\partial g}{\partial q_P} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial q_A} \right] \delta q_A, \quad (6.6)$$

weil die virtuelle Verrückungen  $\delta q_P$  und  $\delta q_A$  zu einem festen Zeitpunkt, d.h. mit  $\delta t = 0$  durchgeführt werden. Aus der Gl.(6.5) ergibt sich außerdem:

$$- \left[ \frac{\partial g}{\partial q_P} \right]^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial q_A} \right] = \frac{\partial (dq_P)}{\partial (dq_A)} = \frac{\partial \dot{q}_P}{\partial \dot{q}_A}. \quad (6.7)$$

Durch Einsetzen der Gln.(6.6) und (6.7) in die Gl.(6.3) folgt:

$$\tau_A^Z = - \left[ \frac{\partial \dot{q}_P}{\partial \dot{q}_A} \right]^T \tau_P^Z, \quad (6.8)$$

da  $\delta q_A \neq 0$ . Aus der Kombination der Gln.(6.1), (6.2) und (6.8) ergibt sich als Schluß:

#### Ansatz 2:

Die Antriebskräfte einer geschlossenen Kette können mit Hilfe der Kenntnis der Antriebskräfte ihrer entsprechenden geschnittenen offenen Kette  $\tau_A^O$  und  $\tau_P^O$  errechnet werden durch:

$$\tau_A^C = \tau_A^O + \left[ \frac{\partial \dot{q}_P}{\partial \dot{q}_A} \right]^T \tau_P^O, \quad (6.9)$$

wenn die partielle Ableitungsmatrix in Gl.(6.9) existiert. ■

Es ist offensichtlich, daß die Antriebskräfte der dem virtuell geöffneten Gelenk entsprechenden Gelenke in der entsprechenden geschnittenen offenen Kette (d.h. der Gelenke  $k_r$  und  $k_l$  im Subsystem 1 in Bild 6-1(c)) gleich null sind, da keine Zwangsbedingungen herrschen. Deshalb kann in der Gl.(6.9) dieses geöffnete Gelenk nicht berücksichtigt



werden, so daß dieses Gelenk in  $\underline{q}_p$  und  $\underline{r}_p$  weggelassen werden kann. Bei der erneuten detaillierten Betrachtung des Gl.(6.1) und des Subsystems 2 erfolgt gemäß der Statik:

### Ansatz 3:

Wenn die Achsen zweier in verschiedenen Zweigen einer geschlossenen Schleife liegender, aktiver Gelenke  $q_i$  und  $q_j$  miteinander übereinstimmen und beide zugleich Schub- bzw. Drehgelenke sind, dann haben die Antriebskräfte beider Gelenke im System der Zwangskräfte (d.h. Subsystem 2 in Bild 6-1(c)) denselben Betrag, aber unterschiedliche Zeichen; d.h.  $\tau_i^Z = -\tau_j^Z$ . Es folgt weiterhin, daß die Werte von  $[\partial \dot{\underline{q}}_p / \partial \dot{\underline{q}}_A]^T \underline{r}_p^0$  in Gl.(6.9) für beide Gelenke auch denselben Betrag, aber unterschiedliche Zeichen haben:

$$\frac{\partial [\dot{\underline{q}}_p]^T}{\partial \dot{q}_i} \underline{r}_p^0 = - \frac{\partial [\dot{\underline{q}}_p]^T}{\partial \dot{q}_j} \underline{r}_p^0. \quad \blacksquare$$

Dieser Ansatz dient zur Reduzierung des Rechenaufwands, falls die in ihm genannte Bedingung erfüllt ist, während das dynamische inverse System einer geschlossenen Kette durch die Kopplung des Ansatzes 2 und der rekursiven Newton-Eulerschen Formulierung der entsprechenden geschnittenen offenen Kette erstellt wird. Ein anderer Zweck des Ansatzes 2 besteht darin, die Bewegungsgleichungen einer geschlossenen Kette herzuleiten.

## 6.2.2 Bewegungsgleichungen einer geschlossenen Kette

Bekanntlich können die Bewegungsgleichungen der entsprechenden geschnittenen offenen Kette folgendermaßen beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} \underline{M}_{AA}^0(\underline{q}) & (\underline{M}_{PA}^0(\underline{q}))^T \\ \underline{M}_{PA}^0(\underline{q}) & \underline{M}_{PP}^0(\underline{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\underline{q}}_A \\ \ddot{\underline{q}}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{f}_A^0(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) \\ \underline{f}_P^0(\dot{\underline{q}}, \underline{q}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{r}_A^0 \\ \underline{r}_P^0 \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

wobei

$$\underline{M}_0 \triangleq \begin{bmatrix} \underline{M}_{AA}^0(q) & (\underline{M}_{PA}^0(q))^T \\ \underline{M}_{PA}^0(q) & \underline{M}_{PP}^0(q) \end{bmatrix}$$

die positiv definite, symmetrische Massenmatrix und

$$\begin{bmatrix} \underline{f}_A^0(\dot{q}, q) \\ \underline{f}_P^0(\dot{q}, q) \end{bmatrix}$$

der Spaltenvektor ist, die die Coriolis-, Zentrifugal- und Gravitationskräfte enthält, und

$$\begin{bmatrix} \underline{\tau}_A^0 \\ \underline{\tau}_P^0 \end{bmatrix}$$

die Antriebskräfte sind.

Durch Anwendung des Ansatzes 2 ergibt sich:

$$\begin{aligned} \underline{\tau}_A^c = & (\underline{M}_{AA}^0 + \left[ \frac{\partial \underline{\dot{q}}_P}{\partial \underline{\dot{q}}_A} \right]^T \underline{M}_{PA}^0) \ddot{\underline{q}}_A + ((\underline{M}_{PA}^0)^T + \left[ \frac{\partial \underline{\dot{q}}_P}{\partial \underline{\dot{q}}_A} \right]^T \underline{M}_{PP}^0) \ddot{\underline{q}}_P + \\ & \underline{f}_A^0 + \left[ \frac{\partial \underline{\dot{q}}_P}{\partial \underline{\dot{q}}_A} \right]^T \underline{f}_P^0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Die Zwangsbedingungen der Gl.(6.4) lassen sich in einer impliziten Funktion von  $\underline{q}_A$  und  $t$  umformulieren:

$$\underline{q}_P = \underline{q}_P(\underline{q}_A, t). \quad (6.12)$$

Die Zeitableitungen der Gl.(6.12) lauten dann:

$$\dot{\underline{q}}_P = \left[ \frac{\partial \underline{q}_P}{\partial \underline{q}_A} \right] \dot{\underline{q}}_A + \frac{\partial \underline{q}_P}{\partial t}, \quad (6.13)$$

$$\ddot{q}_P = \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right] \ddot{q}_A + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right] \dot{q}_A + \frac{\partial^2 q_P}{\partial t^2}. \quad (6.14)$$

Aus Gl.(6.13) ergibt sich außerdem:

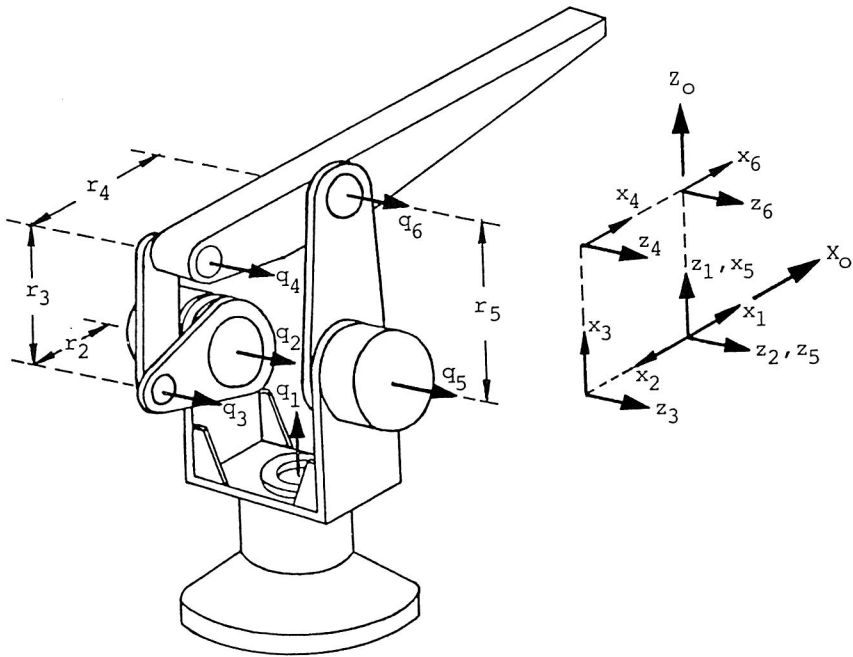
$$\frac{\partial \dot{q}_P}{\partial \dot{q}_A} = \frac{\partial q_P}{\partial q_A}. \quad (6.15)$$

Durch Einsetzen der Gl.(6.14) in die Gl.(6.11) entstehen die Bewegungsgleichungen einer geschlossenen Kette:

$$\begin{aligned} \tau_A^c = & \left\{ \underline{M}_{AA}^O + \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right]^T \underline{M}_{PA}^O + \left( \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right]^T \underline{M}_{PA}^O \right)^T + \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right]^T \underline{M}_{PP}^O \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right] \right\} \ddot{q}_A \\ & + \left( \underline{M}_{PA}^{OT} + \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right]^T \underline{M}_{PP}^O \right) \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right]^T \dot{q}_A + \frac{\partial^2 q_P}{\partial t^2} \\ & + \underline{f}_A^O + \left[ \frac{\partial q_P}{\partial q_A} \right]^T \underline{f}_P^O. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Massenmatrix in Gl.(6.16) eine positiv definite, symmetrische Matrix ist. Die Glieder auf der rechten Seite der Gl.(6.16) mit Ausnahme der Massenmatrix können auch durch ein alternatives Verfahren unmittelbar zusammen errechnet werden:

Beim Einsetzen von Null für die Beschleunigungen aller aktiven Gelenke werden die Teile der Antriebskräfte der aktiven Gelenke ohne die Beiträge der Beschleunigungen aller aktiven Gelenke durch den Ansatz 2 genauso wie das dynamische inverse System errechnet. Hierbei werden die Teile der Beschleunigung der passiven Gelenke infolge der Geschwindigkeiten der aktiven Gelenke und  $(\partial^2 q_P / \partial t^2)$ , d.h. das zweite und das dritte Glied in Gl.(6.16), schon berücksichtigt.



Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	b	d
1	$E_0$	$q_1$	0	0	0
2	$E_1$	$q_2+180^\circ$	$90^\circ$	0	0
3	$E_2$	$\theta_3$	0	$r_2$	0
4	$E_3$	$\theta_4$	0	$r_3$	0
—	$E_4$	0	0	$r_4$	0
	$E_6$				

Gelenk	Basis	$\theta$	$\beta$	b	d	$\delta$	$l$
1	$E_0$	$q_1$	0	0	0	—	—
5	$E_1$	$q_5+90^\circ$	$90^\circ$	0	0	0	0
6	$E_5$	$\theta_6$	0	$r_5$	0	—	—
	$E_6$						

Bild 6-2. Normales Eingangsachsen-Koordinatensystem des Semi-Direct-Drive-Roboters

Dieses Verfahren ist einfacher und weniger rechenaufwendig. Die Zwangsbedingungen geschlossener Ketten haben zudem die Eigenschaft, daß sie immer zeitunabhängig sind, d.h. es gilt:

$$\frac{\partial q_p}{\partial t} = \frac{\partial^2 q_p}{\partial t^2} = 0. \quad (6.17)$$

Solche Bedingungen werden skleronome Bedingungen genannt. Die obigen theoretischen Ergebnisse werden am Beispiel des Semi-Direct-Drive-Roboters im nächsten Abschnitt angewendet.

### 6.3 Semi-Direct-Drive-Roboter als ein Beispiel für Roboter mit einer geschlossenen Kette

Um die Nachteile der Übersetzungsgetriebe zwischen den Antriebsspindeln und den kinematischen Elementen zu vermeiden, entwickelten Asada et al. [3] den Direct-Drive-Arm, in dem die Kugelspindeln der Antriebe unmittelbar mit den jeweiligen Achsen der Gelenke gekoppelt sind. Die konstruktive Ausführung des Direct-Drive-Arms hat zur Folge, daß er im Oberkörper schwerer als ein konventioneller Roboter ist und ein schlechtes Übersetzungsverhältnis hat. Weiterhin entwarfen Asada und Youcef-Toumi [4, 5] den Semi-Direct-Drive-Roboter, der durch ein Gelenkviereck die Nachteile des Direct-Drive-Arms beseitigt. Der Semi-Direct-Drive-Roboter und sein normales Eingangsachsen-Koordinatensystem sind in Bild 6-2 dargestellt.

Die geometrische Bedingung der geschlossene Schleife läßt sich beschreiben mit:

$$\mathbf{I} = \begin{matrix} 1H & 2H & 3H & 4H & 6H & 5H \\ \hline \end{matrix} = \begin{bmatrix} C_{2-5+3+4-6} & -S_{2-5+3+4-6} & 0 & r_2C_{2-5}+r_3C_{2-5+3}+r_4C_{2-5+3+4}-r_5C_{2-5+3+4-6} \\ S_{2-5+3+4-6} & C_{2-5+3+4-6} & 0 & r_2S_{2-5}+r_3S_{2-5+3}+r_4S_{2-5+3+4}-r_5S_{2-5+3+4-6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

wobei gilt:  $C_{i+j} \triangleq \cos(\theta_i \pm \theta_j)$ ,  $S_{i+j} \triangleq \sin(\theta_i \pm \theta_j)$ . Aus

der Gl.(6.18) ergeben sich die drei unabhängigen holonomen Zwangsbedingungen:

$$\theta_2 - \theta_5 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_6 = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (6.19a)$$

$$r_2 C_{2-5} + r_3 C_{2-5+3} + r_4 C_{2-5+3+4} - r_5 = 0, \quad (6.19b)$$

$$r_2 S_{2-5} + r_3 S_{2-5+3} + r_4 S_{2-5+3+4} = 0. \quad (6.19c)$$

Durch Differenzierung der Zwangsbedingungen und einige Matrixoperationen folgen:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{s_4} \begin{bmatrix} -\frac{r_2}{r_3} s_{3+4} - s_4 \\ \frac{r_2}{r_4} s_3 + \frac{r_2}{r_3} s_{3+4} \\ \frac{r_2}{r_4} s_3 \end{bmatrix} (\dot{q}_2 - \dot{q}_5), \quad (6.20)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_3 \\ \ddot{q}_4 \\ \ddot{q}_6 \end{bmatrix} = \frac{1}{s_4} \begin{bmatrix} -\frac{r_2}{r_3} s_{3+4} - s_4 \\ \frac{r_2}{r_4} s_3 + \frac{r_2}{r_3} s_{3+4} \\ \frac{r_2}{r_4} s_3 \end{bmatrix} (\ddot{q}_2 - \ddot{q}_5) +$$

$$\begin{bmatrix} C_4 \dot{q}_4 \left( \frac{r_2}{r_3} \frac{s_{3+4}}{s_4} \right) - \frac{r_2}{r_3} C_{3+4} (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \\ -C_4 \dot{q}_4 \left( \frac{r_2}{r_4} \frac{s_3}{s_4} + \frac{r_2}{r_3} \frac{s_{3+4}}{s_4} \right) + \frac{r_2}{r_3} C_{3+4} (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + \frac{r_2}{r_4} C_3 \dot{q}_3 \\ -C_4 \dot{q}_4 \left( \frac{r_2}{r_4} \frac{s_3}{s_4} \right) + \frac{r_2}{r_4} C_3 \dot{q}_3 \end{bmatrix} \frac{\dot{q}_2 - \dot{q}_5}{s_4}. \quad (6.21)$$

Wie oben bereits erörtert, wird eines der drei passiven Gelenke  $q_3$ ,  $q_4$  und  $q_6$  als virtuell geöffnetes Gelenk gewählt; nur die beiden anderen müssen in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Es wird davon ausgegangen, daß das Gelenk 4 als das virtuell geöffnete Gelenk behandelt wird, damit die Anzahl der Gelenke beider offener Zweige nicht zu groß wird. Gemäß dem Ansatz 2 ergeben sich aus der Gl.(6.20):

$$\frac{\partial q_3}{\partial q_2} = - \frac{\partial q_3}{\partial q_5} = \frac{r_2}{r_3} \frac{S_{3+4}}{S_4} - 1, \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial q_6}{\partial q_2} = - \frac{\partial q_6}{\partial q_5} = \frac{r_2}{r_4} \frac{S_3}{S_4}, \quad (6.23)$$

$$\begin{bmatrix} r_1^c \\ r_2^c \\ r_5^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1^o \\ r_2^o \\ r_5^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_5} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3^o \\ r_6^o \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

Bei der Betrachtung der Matrix im zweiten Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung läßt sich der Ansatz 3 bestätigen. In der Tat wurde dieser Sachverhalt bereits früher bemerkt, und es wurde beabsichtigt, die Beziehungen von  $\dot{q}_3$  und  $\dot{q}_6$  zu  $(\dot{q}_2 - \dot{q}_5)$  von Anfang an durch die Einführung von  $(\theta_2 - \theta_5)$  in Gl.(6.18) herzuleiten. Obwohl das dynamische inverse System des Semi-Direct-Drive-Roboters schon von Luh und Zheng [43] behandelt wurde, ist das oben gezeigte Ergebnis der Gl.(6.24) günstiger und einfacher.

Die Werte von  $\theta_2$ ,  $\theta_5$ ,  $\dot{q}_2$  und  $\dot{q}_5$  werden durch das Wegmeßsystem an den Antrieben auf das dynamische inverse System übertragen; die Werte von  $\ddot{q}_2$  und  $\ddot{q}_5$  werden andererseits vom Regler angegeben. Die notwendigen Werte von  $C_3$ ,  $S_3$ ,  $C_{3+4}$ ,  $S_{3+4}$ ,  $C_4$ ,  $S_4$ ,  $C_5$  und  $S_5$  können mit Hilfe der Tabelle 6-1

errechnet werden, in der der Schritt II die Methode von Suh und Racliff [66] zur Lösung der Quadratsumme der Gln.(6.19b) und (6.19c) darstellt. In Schritt II existieren zwei Lösungen für zwei unterschiedliche Konfigurationen: für das Parallelogramm und das Antiparallelogramm, die "Mode I" und "Mode II" in [4] entsprechen. Anschließend werden die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der passiven Gelenke außer des virtuell geöffneten Gelenks  $q_4$  mit Hilfe der Gln.(6.20) und (6.21) errechnet. Zum Schluß werden die Antriebskräfte der geschlossenen Kette mit Hilfe der Gl.(6.24) erhalten. Die gesamten arithmetischen Operationen betragen 39M + 27A + 6D + 1Q mit "M" als Multiplikation, "A" als Addition, "D" als Division und "Q" als Quadratwurzel.

Wenn  $\sin\theta_4 = 0$  in den Gln.(6.22) und (6.23), dann sind  $r_2^C$  und  $r_5^C$  unendlich, d.h.  $\theta_4 = 0^\circ, \pm 180^\circ$  sind die singulären

**Tabelle 6-1.** Algorithmus zum Errechnen von sin und cos

---

Schritt I.	$\cos(\theta_2 - \theta_5) = \cos\theta_2 \cos\theta_5 + \sin\theta_2 \sin\theta_5$ $\sin(\theta_2 - \theta_5) = \sin\theta_2 \cos\theta_5 - \cos\theta_2 \sin\theta_5$
Schritt II.	$G = \frac{(r_2^2 + r_3^2 + r_5^2 - r_4^2)}{2} - r_2 r_5 \cos(\theta_2 - \theta_5)$ $F = r_2 r_3 - r_3 r_5 \cos(\theta_2 - \theta_5)$ $E = r_3 r_5 \sin(\theta_2 - \theta_5)$ $t = \frac{E \pm \sqrt{E^2 + (F - G)(F + G)}}{(F - G)}$ $\cos\theta_3 = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin\theta_3 = \frac{2t}{1 + t^2}$
Schritt III.	$\cos(\theta_3 + \theta_4) = -\frac{r_2}{r_4} - \frac{r_3}{r_4} \cos\theta_3 + \frac{r_5}{r_4} \cos(\theta_2 - \theta_5)$ $\sin(\theta_3 + \theta_4) = -\frac{r_3}{r_4} \sin\theta_3 - \frac{r_5}{r_4} \sin(\theta_2 - \theta_5)$ $\cos\theta_4 = \cos(\theta_3 + \theta_4) \cos\theta_3 + \sin(\theta_3 + \theta_4) \sin\theta_3$ $\sin\theta_4 = \sin(\theta_3 + \theta_4) \cos\theta_3 - \cos(\theta_3 + \theta_4) \sin\theta_3$ $\cos\theta_6 = \cos(\theta_2 - \theta_5) \cos(\theta_3 + \theta_4) - \sin(\theta_2 - \theta_5) \sin(\theta_3 + \theta_4)$ $\sin\theta_6 = \sin(\theta_2 - \theta_5) \cos(\theta_3 + \theta_4) + \cos(\theta_2 - \theta_5) \sin(\theta_3 + \theta_4)$

---



Punkte von  $[\partial q_P / \partial q_A]$ . Wenn sich der Roboter an den singulären Punkten befindet, kann er an den Gliedern 3 und 4 keine Last tragen, weshalb er an solchen Konfigurationen nicht ruhig bleiben kann. Diese Eigenschaft wird dynamische Singularität genannt.

Gemäß der Gl.(6.16) lauten die Bewegungsgleichungen des Semi-Direct-Drive-Roboters:

$$\underline{\tau}^C = \underline{M}^C \ddot{\underline{q}}^C + \underline{f}^C, \quad (6.25)$$

wobei

$$\underline{\tau}^C = [\tau_1^C \quad \tau_2^C \quad \tau_5^C]^T,$$

$$\underline{q}^C = [q_1 \quad q_2 \quad q_5]^T,$$

$$\begin{aligned} \underline{M}^C = & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{25} \\ m_{51} & m_{52} & m_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_5} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{31} & m_{32} & m_{35} \\ m_{61} & m_{62} & m_{65} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} m_{13} & m_{16} \\ m_{23} & m_{26} \\ m_{26} & m_{56} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_3}{\partial q_5} \\ 0 & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_5} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{33} & m_{36} \\ m_{63} & m_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_3}{\partial q_5} \\ 0 & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{f}^C = & \left\{ \begin{bmatrix} m_{13} & m_{16} \\ m_{23} & m_{26} \\ m_{53} & m_{56} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_5} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{33} & m_{36} \\ m_{63} & m_{66} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_3}{\partial q_2} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \right) \end{bmatrix} (\dot{q}_2 - \dot{q}_5) \\ & + \begin{bmatrix} f_1^0 \\ f_2^0 \\ f_5^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_2} & \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial q_5} & \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3^0 \\ f_6^0 \end{bmatrix} \\ = & \underline{f}^C(\ddot{q}_1=0, \ddot{q}_2=0, \ddot{q}_5=0, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_5, q_1, q_2, q_5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_3}{\partial q_2} \right) &= - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_3}{\partial q_5} \right) = \left\{ c_{44} \dot{q}_4 \left( \frac{r_2}{r_3} \frac{S_{3+4}}{S_4} \right) - \frac{r_2}{r_3} c_{3+4} (\dot{q}_3 + \dot{q}_4) \right\} \div S_4, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_6}{\partial q_2} \right) &= - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial q_6}{\partial q_5} \right) = \left\{ -c_{44} \dot{q}_4 \left( \frac{r_2}{r_4} \frac{S_3}{S_4} \right) + \frac{r_2}{r_4} c_{34} \dot{q}_3 \right\} \div S_4. \end{aligned}$$

Hierbei sind  $m_{ij}$  die  $(i, j)$ -Elemente von  $\underline{M}^0$ . Der Klarheit halber wurde die Symmetrie der Massenmatrix der entsprechenden geschnittenen offenen Kette in diesen Gleichungen nicht berücksichtigt. Bei der Implementierung dieser Gleichungen sollte zusätzlich noch  $m_{52} = m_{53} = m_{62} = m_{63} = 0$  zur Reduzierung des Rechenaufwands beachtet werden.

Als technische Daten des Semi-Direct-Drive-Roboters seien zur Simulation die in Tabelle 6-2 dargestellten angenommen. Die in der Simulation verwendeten Gelenkbahnen sind in Bild 6-3 dargestellt. Diese entsprechen einer Parallelogrammkonfiguration. Die Verläufe der Antriebskräfte sind mit Hilfe der Gl.(6.24) errechnet und in Bild 6-4 dargestellt. Zur Erstellung der Massenmatrix einer offenen Kette mit

Tabelle 6-2. Technische Daten des Semi-Direct-Drive-Roboters

Glieder	Masse (kg)	Schwerpunkt (m)			Trägheitstensor (kg m <sup>2</sup> )		
		c <sub>x</sub>	c <sub>y</sub>	c <sub>z</sub>	J <sub>xx</sub>	J <sub>yy</sub>	J <sub>zz</sub>
1	9,29	0,	0,	-0,2752	0,276	0,255	0,71
2	1,0498	0,1118	0,	-0,2	0,0018	0,00732	0,01371
3	1,0267	0,2345	0,	-0,2	0,0051	0,01436	0,02748
5	5,037	0,1385	0,	0,2	0,0069	0,0957	0,14405
6	7,57	0,0873	0,	0,	0,0082	0,2107	0,45142

$$r_2 = 0,25\text{m}, r_3 = 0,4\text{m}, r_4 = 0,25\text{m}, r_5 = 0,4\text{m}$$

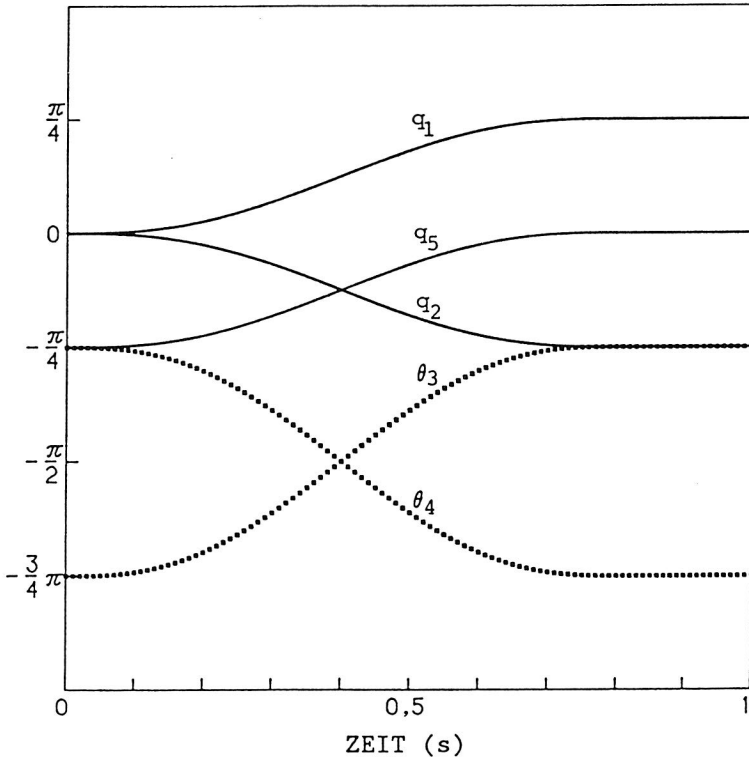


Bild 6-3. Sollgelenkbahnen des Semi-Direct-Drive-Roboters

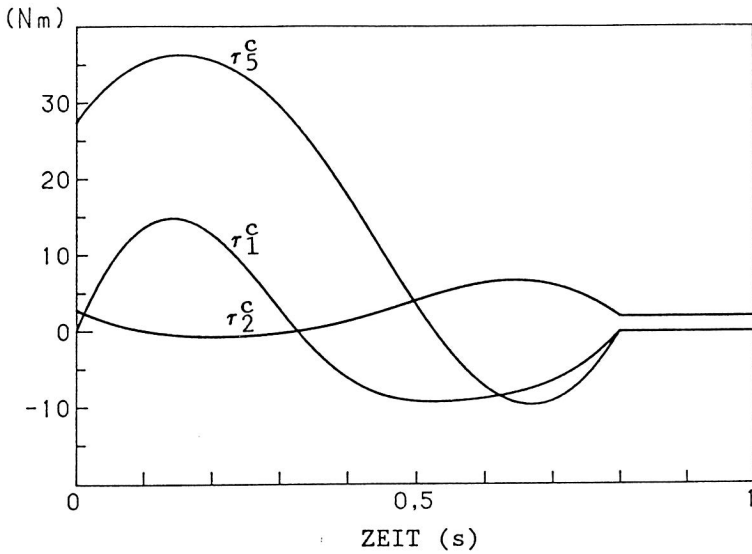


Bild 6-4. Antriebskräfte des Semi-Direct-Drive-Roboters entsprechend den in Bild 6-3 dargestellten Sollgelenkbahnen

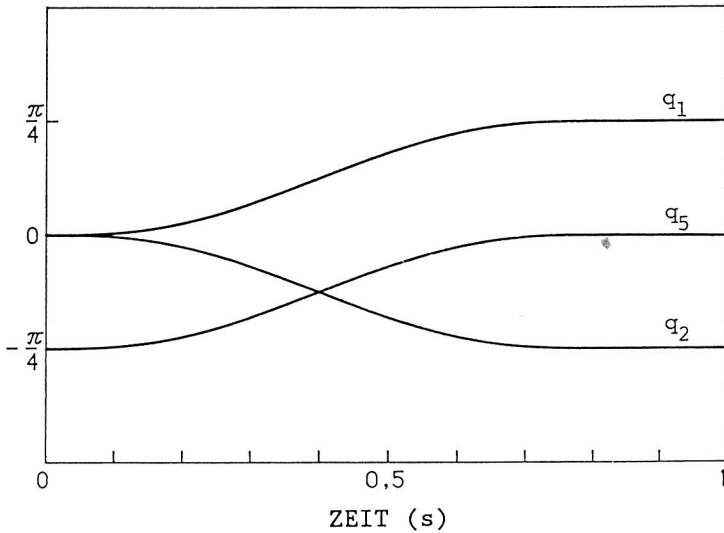


Bild 6-5. Antwort der Gelenkverrückungen bei der Simulation mit den in Bild 6-4 dargestellten Antriebskräften als Eingaben

Zweigstruktur wird auf [38] verwiesen. Mit Hilfe der Gl.(6.25) wurde eine dynamische Simulation mit den in Bild 6-4 dargestellten Antriebskräften als Eingaben durchgeführt; das Ergebnis ist in Bild 6-5 dargestellt und stimmt mit den Sollgelenkbahnen in Bild 6-3 überein.

## 6.4 Modelle der Lageregelung

### 6.4.1 Gelenk-Lageregelung

Auf der Basis der dynamischen Beziehung zwischen einer geschlossenen Kette und ihrer entsprechenden geschnittenen offenen Kette kann die Lageregelung durch Rückführungsentkopplung für Roboter mit einer offenen Kette auf Roboter mit einer geschlossenen Kette erweitert werden.

Entsprechend einem Roboter mit einer geschlossenen Kette kann ein gleichwertiger Roboter mit einer einfachen offenen Kette hergestellt werden. In einer geschlossenen Schleife werden nur genausoviele Gelenke wie Freiheitsgrade der Schleife im gleichwertigen Roboter benötigt. Weil der gleichwertige Roboter eine einfache offene Kette sein muß, müssen diese Gelenke in Serie miteinander und mit den Gelenken außerhalb der geschlossenen Schleife verbunden werden. Die Gelenke 2, 3 und 4 des Semi-Direct-Drive-Roboters werden z.B. bei der Erstellung des ihm gleichwertigen Roboters mit einer einfachen offenen Kette herausgelöst.

Der gleichwertige Roboter erleichtert die Koordinatentransformation zwischen den Kartesischen Weltkoordinaten und den Gelenken. Bei der Gelenk-Lageregelung eines Roboters mit einer geschlossenen Kette wird die Kartesische Sollbahn des Endeffektors zunächst in die Gelenkkoordinaten des gleichwertigen Roboters (gekennzeichnet mit  $q_G$ ) transformiert. Die Sollverrückungen, -geschwindigkeiten und -beschleunigungen der aktiven Gelenke innerhalb der

geschlossenen Schleife werden dann von den holonomen Zwangsbedingungen bestimmt.

Am Beispiel des Semi-Direct-Drive-Roboters zeigen sich:

$$q_G = [q_1 \quad q_5 \quad q_6]^T,$$

$$q_A = [q_1 \quad q_2 \quad q_5]^T,$$

$$q_P = [q_3 \quad q_6]^T,$$

$$\dot{q}_2 = \dot{q}_5 + \frac{s_4}{s_3} \frac{r_4}{r_2} \dot{q}_6, \quad (6.26)$$

$$\ddot{q}_2 = \ddot{q}_5 + \frac{s_4}{s_3} \frac{r_4}{r_2} \left\{ \left( \frac{r_2}{r_4} \frac{s_3}{s_4} c_4 \dot{q}_4 - \frac{r_2}{r_4} c_3 \dot{q}_3 \right) \frac{\dot{q}_2 - \dot{q}_5}{s_4} + \ddot{q}_6 \right\}. \quad (6.27)$$

Die Gln.(6.26) und (6.27) ergeben sich aus den Gln.(6.20) und (6.21). Zum Errechnen von  $\theta_2$  sind die Zwangsbedingungen erneut herzuleiten:

$$\underline{I} = {}^6_H {}^5_H {}^1_H {}^2_H {}^3_H {}^4_H. \quad (6.28)$$

Analog zum Errechnen von  $C_3$  und  $S_3$  (s. Tabelle 6-1) wird die Quadratsumme der Zwangsbedingungen der Gl.(6.28) hergeleitet:

$$r_3^2 = r_2^2 + r_4^2 + r_5^2 - 2r_4r_5c_6 - 2(r_2r_4c_6 - r_2r_5) c_{2-5} + 2(r_2r_4s_6) s_{2-5}. \quad (6.29)$$

Durch Einsetzen der folgenden Zeichen:

$$G \triangleq \frac{r_2^2 + r_4^2 + r_5^2 - r_3^2}{2} - r_4 r_5 c_6,$$

$$F \triangleq -(r_2 r_5 - r_2 r_4 c_6),$$

$$E \triangleq r_2 \ r_4 \ S_6,$$

$$t \triangleq \frac{\tan(\theta_2 - \theta_5)}{2},$$

$$C_{2-5} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$S_{2-5} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

wird die Gl.(6.29) wie folgt umformuliert:

$$(F - G) t^2 - 2E t - (F + G) = 0. \quad (6.30)$$

Daraus ergeben sich:

$$t = \frac{E \pm \sqrt{E^2 + (F - G)(F + G)}}{(F - G)}, \quad (6.31)$$

$$\theta_2 = \theta_5 + 2 \tan^{-1} t \quad (6.32)$$

mit

$$-\pi/2 < \tan^{-1} t < \pi/2.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß  $\theta_3 = 0^\circ, \pm 180^\circ$  die kinematischen singulären Punkte der geschlossenen Schleife darstellen, weil sich  $\sin\theta_3$  im Nenner der Gl.(6.26) befindet. Zur kinematischen Singularität des gleichwertigen Roboters wird auf Kapitel 3 verwiesen.

Der PID-Regler wird an einzelnen aktiven Gelenken eingesetzt. Durch die Regelung der Sollwerte und der rückgeführten Istwerte von  $q_A$  und  $\dot{q}_A$  werden die geregelten Sollbeschleunigungen der aktiven Gelenke  $\ddot{q}_A^*$  erhalten.

Das dynamische inverse System des Roboters mit einer geschlossenen Kette wird unterteilt in:

1. das inverse System seiner entsprechenden geschnittenen offenen Kette,
2. die dynamische Kopplung zwischen der geschlossenen Kette und der entsprechenden geschnittenen offenen Kette, vgl. Ansatz 2 in Abschnitt 6.2.1.

Das Blockschaltdiagramm der Gelenk-Lageregelung von Robotern mit einer geschlossenen Kette ist in Bild 6-6 dargestellt. Im Vergleich mit der Gelenk-Lageregelung von Robotern mit einer einfachen Kette hat diese Gelenk-Lageregelung zusätzlich zwei Teile: die Koordinationstransformation innerhalb der geschlossenen Schleife und die dynamische Kopplung.

#### 6.4.2 Kartesische Lageregelung

Die oben behandelte Gelenk-Lageregelung geht problemlos in die Kartesische Lageregelung von Robotern mit einer geschlossenen Kette über (s. Bild 6-7). Alle Koordinatentransformationen vor dem Regler sind bei der Kartesischen Lageregelung nicht mehr erforderlich. Andererseits sind die Istlage und -geschwindigkeiten des Endeffektors die erforderlichen Rückführungssignale für den Kartesischen Regler. Sie werden durch die Vorwärtskinematik des gleichwertigen Roboters aufgrund der Istwerte von  $\underline{q}_G$  und  $\dot{\underline{q}}_G$  bestimmt, die durch die Koordinatentransformation innerhalb der geschlossenen Schleife mit den gemessenen Istverrückungen und -geschwindigkeiten der aktiven Gelenke  $\underline{q}_A$  und  $\dot{\underline{q}}_A$  errechnet werden. Durch den Kartesischen Regler werden die geregelten Sollbeschleunigungen der Gelenke des gleichwertigen Roboters  $\ddot{\underline{q}}_G^*$  erhalten. Durch die Koordinatentransformation innerhalb der geschlossenen Schleife folgen dann die geregelten Sollbeschleunigungen aller Gelenke  $\ddot{\underline{q}}_A^*$  und  $\ddot{\underline{q}}_P^*$ .



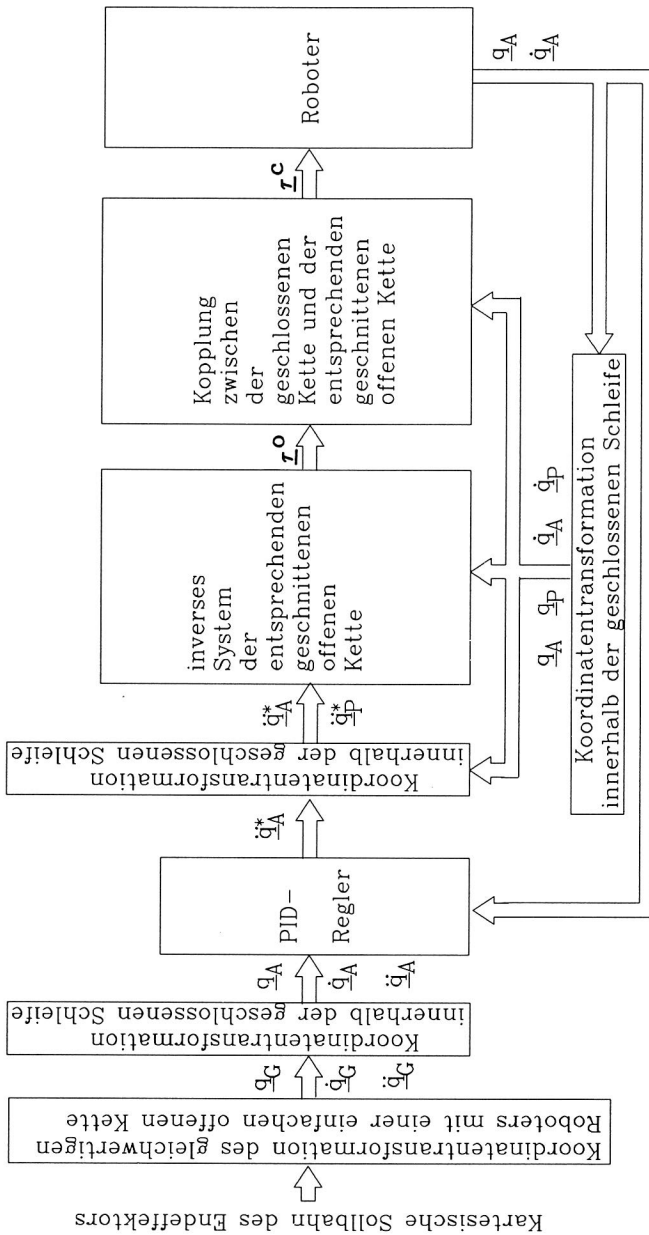


Bild 6-6. Modell der Gelenk-Lageregelung eines Roboters mit einer geschlossenen Kette

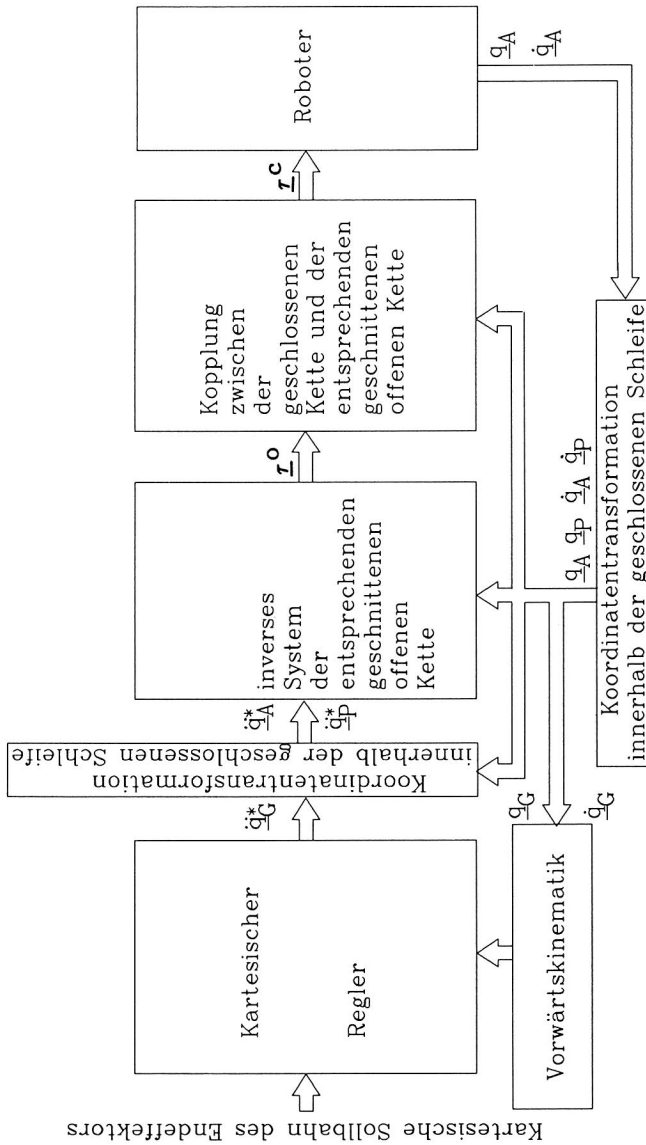


Bild 6-7. Modell der Kartesischen Lageregelung eines Roboters mit einer geschlossenen Kette

Wird der Semi-Direct-Drive-Roboter nochmals als Beispiel herangezogen, kann  $\ddot{q}_2^*$  mit Hilfe der Gl.(6.27) und anschließend  $\ddot{q}_3^*$  mit Hilfe der Gl.(6.21) errechnet werden.

## 6.5 Schlußbemerkungen

Der Einfachheit halber wurden in diesem Kapitel Roboter mit nur einer geschlossenen Kette behandelt. Die vorliegenden Ergebnisse gelten jedoch auch für Roboter mit beliebig vielen geschlossenen Ketten. Dazu müssen nur mehrere geschlossene Schleifen erarbeitet werden; so gibt es z.B. bei dem KUKA/601 CP (s. Bild 2-8) drei geschlossene Schleifen und somit drei kinematische Aufgaben der geschlossenen Schleifen. Der zunehmende Rechenaufwand kann durch den Einsatz eines Multimikroprozessorsystems reduziert werden; das Berechnen jeder geschlossenen Schleife wird jeweils von einem einzelnen Mikroprozessor durchgeführt.

## 7 ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit soll zur Entwicklung von Modellen zur Lageregelung von Industrierobotern in drei Bereichen beitragen: der Kinematik, der Dynamik und der Lageregelung durch die Rückführungsentkopplung.

Eingangs wurde das Hilfsmittel zur Kinematik und Dynamik von Industrierobotern, nämlich das körperfeste Koordinatensystem, erläutert. Die Theorie des in Kapitel 2 eingeführten Eingangsachsen-Koordinatensystems zeigt, daß das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem vielseitige Vorteile hat. Es empfiehlt sich, bei den kinematischen und dynamischen Aufgaben von Industrierobotern das normale Eingangsachsen-Koordinatensystem zu verwenden.

Die Lösungsverfahren der kinematischen Aufgaben wurden zunächst am Beispiel des Stanford-Arms ausführlich vorgestellt. Zusätzlich beschäftigte sich Kapitel 3 mit der kinematischen Singularität und der Methode zur Behandlung der Singularität. Während die Positionssingularität bei dem Entwurf des Arbeitsraums vermieden werden kann, kann die Orientierungssingularität an irgendeinem Punkt im Arbeitsraum auftreten. Da die Orientierungsgenauigkeit bei allen Fertigungsaufgaben eine untergeordnete Rolle spielt, wird eine gewisse Komponente der Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors bei der Inversion der Jacobimatrix vernachlässigt, um die Positionsgenauigkeit zu gewährleisten.

Im darauf folgenden Kapitel wurde die rekursive Newton-Eulersche Formulierung zum dynamischen inversen System auf der Basis des normalen Eingangsachsen-Koordinatensystems erneut hergeleitet. Dazu wurde ein Algorithmus entwickelt, der weniger rechenaufwendig ist als der auf der originalen Formulierung [42] basierende. Die Implementierung dieses Algorithmus wurde an einem Mikroprozessor des Multi-Mikrocomputersystems MMC 216 realisiert. Die Meßergebnisse zeigen, daß die auf der Basis dieses Algorithmus aufgebaute

Mikroprozessorensoftware, die für das dynamische inverse System von heutigen Industrierobotern entwickelt wurde, das Abtastzeitkriterium des Industrieroboters befriedigt.

Gegenüber der konventionellen Gelenk-Lageregelung hat die Kartesische Lageregelung den Vorteil, daß die Bahnabweichung des Endeffektors unmittelbar im Kartesischen Weltkoordinatensystem geregelt wird. Damit bleibt die Genauigkeit der Bewegung von Robotern im ganzen Arbeitsraum, ausschließlich in der Nähe von kinematischen singulären Punkten, gleich. Wenn in der Zukunft eine Einrichtung zur Messung der Position und Orientierung des Endeffektors eingesetzt werden könnte, würden störende Nichtlinearitäten und Elastizitäten in den Antriebsachsen und Getrieben durch die Kartesische Lageregelung umgangen [33]. Die Schwierigkeit liegt aber darin, die Orientierungsabweichung zu definieren. Durch die Einführung der Eulerschen Parameter als Orientierungsabweichung wurde dieses Problem gelöst und in Kapitel 5 ein Modell der Kartesischen Lageregelung aufgebaut. Die Theorie ließ sich durch eine Simulation bestätigen.

Das letzte Kapitel beschäftigte sich mit Robotern mit geschlossenen Ketten. Zunächst wurde eine dynamische Beziehung zwischen einem Roboter mit einer geschlossenen Kette und seiner entsprechenden geschnittenen offenen Kette hergeleitet. Basierend auf diesem Ansatz können alle für Roboter mit einer einfachen Kette entwickelten Modelle einfach auf Roboter mit geschlossenen Ketten erweitert werden.

Alle in der vorliegenden Arbeit entwickelte Modelle sind von großer Bedeutung, wenn eine sehr leistungsfähige Lageregelung beim Einsatz von Industrierobotern bei Fertigungsaufgaben erforderlich ist.

## 8 LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aboaf, E. W;  
Paul, R. P.: Living with the Singularity of Robot Wrists.  
Proceedings of 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1987, Raleigh, Vol. 3, S. 1713-1717.
  
- [2] Ang, M. H.;  
Tourassis, V. D.: Singularities of Euler and Roll-Pitch-Yaw Representations.  
IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-23, No. 3, S. 317-324, 1987.
  
- [3] Asada, H.;  
Kanade, T.;  
Takeyama, I.: Control of a Direct-Drive Arm.  
Transactions ASME: J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 105, S. 136- 142, 1983.
  
- [4] Asada, H.;  
Youcef-Toumi, K.: Analysis and Design of Semi-Direct-Drive Robot Arms.  
Proceedings of the American Control Conference, 1983, San Francisco, S. 757-764.
  
- [5] Asada, H.;  
Youcef-Toumi, K.: Analysis and Design of a Direct-Drive Arm with a Five-Bar-Link Parallel Drive Mechanism.  
Transactions ASME: J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 106, S. 225-230, 1984.
  
- [6] Bejczy, A. K.;  
Tarn, T. J.;  
Chen, Y. L.: Robot Arm Dynamic Control by Computer.  
Proceedings of 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1985, St. Louis, S. 960-970.

- [7] Cannon, R. H.: Dynamics of Physical Systems.  
McGraw-Hill, New York, 1967.
- [8] Chen, C. T.: Introduction to Linear System  
Theory.  
Holt Reinhart and Winston, New  
York, 1970.
- [9] Denavit, J.; A Kinematic Notation for Lower-Pair  
Hartenberg, R. S.: Mechanisms Based on Matrices.  
Transactions ASME: J. of Applied  
Mechanics,  
Vol. 22, S. 215-221, 1955.
- [10] Duellen, G.; Methoden für die Parameteridentifi-  
Held, J.; kation kinematischer Ketten.  
Kirchhoff, U.: Robotersystem,  
Bd. 1, S. 217-223, 1985.
- [11] Egeland, O.: On the Robustness of the Computed  
Torque Technique in Manipulator  
Control.  
Proceedings of IEEE 1986 Inter-  
national Conference on Robotics and  
Automation,  
1986, San Francisco, Vol. 2, S.  
1203-1208.
- [12] Featherstone, R.: Position and Velocity Transforma-  
tions between Robot and Effect  
Coordinates and Angles.  
International J. of Robotics Re-  
search,  
Vol. 2, No. 2, S. 35-45, 1983.
- [13] Feldmann, K.: Ziele, Aufbau und Arbeitsweise des  
Kooperationsprojektes PAP.  
Fachtagung "Rechnerintegrierte Pro-  
duktionssysteme",  
27.-28. Okt. 1987, Erlangen, S. 29-  
41.

- [14] Föllinger, O.: Regelungstechnik.  
Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg, 5. Aufl., 1985.
- [15] Freund, E.: The Structure of Decoupled Non-linear Systems.  
International J. of Control,  
Vol. 21, No. 3, S. 443-450, 1983.
- [16] Freund, E.;  
Hoyer, H.: Das Prinzip nichtlinearer System-  
entkopplung mit der Anwendung auf  
Industrieroboter.  
Regelungstechnik,  
Bd. 28, S. 80-87 und S. 116-126,  
1980.
- [17] Gilbert, E. G.;  
Ha, I. J.: An Approach to Nonlinear Feedback  
Control with Applications to  
Robotics.  
IEEE Transactions on Systems, Man,  
and Cybernetics,  
Vol. SMC-14, No. 6, S. 879-884,  
1984.
- [18] Goldstein, H.: Classical Mechanics.  
Addison-Wesley, Reading, MA, 1959.
- [19] Gupta, K. C.: A Note on Position Analysis of  
Manipulators.  
Mechanism and Machine Theory,  
Vol. 19, No. 1, S. 5-8, 1984.
- [20] Gupta, K. C.: Kinematic Analysis of Manipulators  
Using the Zero Reference Position  
Description.  
International J. of Robotics Re-  
search,  
Vol. 5, No. 2, S. 5-13, 1986.



- [21] Hartenberg, R. S.: Die Darstellung und Handhabung der niederen Elementenpaare in einer auf Matrizenrechnung gegründeten Zeichensprache.  
VDI Berichte,  
Bd. 12, S. 145-155, 1956.
- [22] Hewit, J. R.;           Fast Dynamic Decoupled Control for  
Burdess, J. S.:       Robotics, Using Active Force  
Control.  
Mechanism and Machine Theory,  
Vol. 16, No. 5, S. 535- 542, 1981.
- [23] Hollerbach, J. M.: A Recursive Langrangian Formulation  
of Manipulator Dynamics and a  
Comparative Study of Dynamics  
Formulation Complexity.  
IEEE Transactions on Systems, Man,  
and Cybernetics,  
Vol. SMC-10, No. 11, S. 730-736,  
1980.
- [24] Hollerbach, J. M.;   Wrist-Partitioned, Inverse Kinema-  
Sahar, G.:           tic Accelerations and Manipulator  
Dynamics.  
International J. of Robotics Re-  
search,  
Vol. 2, No. 4, S. 61-76, 1983.
- [25] Hunt, L. R.;       Design for Multi-Input Nonlinear  
Su, R.;               System.  
Meyer, G.:           Differential Geometric Control  
Theory; R. Brockett et. al. (Ed.).  
S. 268-298, Birkhäuser Inc.,  
Boston, 1983.
- [26] Huston, R. L.;       Dynamics of Multirigid-Body Sys-  
Passerello, C. E.;   tems.  
Harlow, M. W.:       Transactions ASME: J. of Applied  
Mechanics,  
Vol. 45, S. 889-894, 1978.

- [27] Kasahara, H.; Narita, S.: Parallel Processing of Robot-Arm Control Computation on a Multi-microprocessor System. IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-1, No. 2, S. 104-113, 1985.
- [28] Kazerounian, K.; Gupta, K. C.: Manipulator Dynamics Using the Extended Zero Reference Position Description. IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-2, No. 4, S. 221-224, 1986.
- [29] Khalil, W.; Kleinfinger, J. F.: A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots. Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1986, San Francisco, Vol. 2, S. 1174-1179.
- [30] Khalil, W.; Kleinfinger, J. F.; Gautier, M.: Reducing the Computational Burden of the Dynamic Models of Robots. Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1986, San Francisco, Vol. 1, S. 525-531.
- [31] Khatib, O.: A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: the Operational Space Formulation. IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-3, No. 1, S. 43-53, 1987.
- [32] Klumpp, A. R.: Singularity-Free Extraction of a Quaternion from a Direction Cosine Matrix. J. of Spacecraft, Vol. 13, No. 12, S. 754-755, 1976.

- [33] Kuntze, H. B.: Regelungsalgorithmen für Industrieroboter — eine Übersicht. Sehr fortgeschrittene Handhabungssysteme, Ergebnisse und Anwendung; P. J. Becker (Hrsg.). S. 32-58, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [34] Kuntze, H. B.; Patzelt, W.: Einsatz regelungstechnischer Verfahren für typische Roboteranwendungen. Sehr fortgeschrittene Handhabungssysteme, Ergebnisse und Anwendung; P. J. Becker (Hrsg.). S. 7-31, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [35] Lee, C. S. B.; Ziegler, M.: Geometric Approach in Solving Inverse Kinematics of PUMA Robots. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-20, No. 6, S. 695-706, 1984.
- [36] Lin, S. K.: Coordinate Transformations with Euler Parameters as a Quaternion — an Alternative Approach to Kinematics and Dynamics of Manipulators. Proceedings of 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1987, Raleigh, Vol. 1, S. 33-38.
- [37] Lin, S. K.: Microprocessor Implementation of the Inverse Dynamical System for Industrial Robot Control. Proceedings/Preprints of 10th IFAC World Congress on Automatic Control, 1987, München, Vol. 4, S. 332-339.

- [38] Lin, S. K.: An efficient Formulation for the Dynamic Simulation of Robots. Preprints of IFAC-Symposium on Robot Control '88, 1988, Karlsruhe, S. 62.1-62.6.
- [39] Luh, J. Y. S.: Conventional Controller Design for Industrial Robots — A Tutorial. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-13, No. 3, S. 298-316, 1983.
- [40] Luh, J. Y. S.;  
Lin, C. S.: Scheduling of Parallel Computation for a Computer-Controlled Mechanical Manipulator. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SME-12, No. 2, S. 214-234, 1982.
- [41] Luh, J. Y. S.;  
Walker, M. W.;  
Paul, R. P.: Resolved Acceleration Control of Mechanical Manipulators. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. A-25, No. 3, S. 468-474, 1980.
- [42] Luh, J. Y. S.;  
Walker, M. W.;  
Paul, R. P.: On-Line Computational Scheme for Mechanical Manipulators. Transactions ASME: J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, Vol. 102, S. 69-76, 1980.
- [43] Luh, J. Y. S.;  
Zheng, Y. F.: Computation of Input Generalized Forces for Robots with Closed Kinematic Chain Mechanisms. IEEE J. of Robotics and Automation, Vol. RA-1, No. 2, S. 95-103, 1985.

- [44] Luo, G. L.;  
Saridis, G. N.: L-Q Design of PID Controllers for Robot Arms.  
IEEE J. of Robotics and Automation,  
Vol. RA-1, No. 3, S. 152-159, 1985.
- [45] McInnis B. C.;  
Liu, C. K. F.: Kinematics and Dynamics in Robotics: A Tutorial Based upon Classical Concepts of Vectorial Mechanics.  
IEEE J. of Robotics and Automation,  
Vol. RQ-2, No. 4, S. 181-187, 1986.
- [46] Neuman, C. P.;  
Murray, J. J.: Computational Robot dynamics: foundation and Applications.  
J. of Robotic Systems,  
Vol. 2, No. 4, S. 425-452, 1985.
- [47] Orin, D. E.;  
Schrader, W. W.: Efficient Computation of the Jacobian for Robot Manipulators.  
International J. of Robotics Research,  
Vol. 3, No. 4, S. 66-75, 1984.
- [48] Patarinski, S. P.: Control of Manipulation Robots: Inverse Kinematics Solution in Real-Time.  
Preprints of 10th IFAC World Congress on Automatic Control, 1987, München, Vol. 4, S. 274-279.
- [49] Patzelt, W.: Zur Lageregelung von Industrierobotern bei Entkopplung durch das inverse System.  
Regelungstechnik,  
Bd. 29, Hf. 12, S. 441-422, 1981.
- [50] Patzelt, W.: Zur Lageregelung von Industrierobotern auf der Grundlage des inversen Systems.  
Dissertation, Uni. Duisburg, 1982.

- [51] Paul, R. P.: Robot Manipulators.  
MIT Press, Cambridge, MA, 1981.
- [52] Paul, R. P.;  
Stevenson, C. N.: Kinematics of Robot Wrists.  
International J. of Robotics Research,  
Vol. 2, No. 1, S. 31-38, 1983.
- [53] Porter, W. A.: Diagonalization and Inverses for  
Non-Linear Systems.  
International J. of Control,  
Vol. 11, No. 1, S. 67-76, 1970.
- [54] Reuleaux, F.: Kinematics of Machinery.  
MacMillan Company, London, 1876.
- [55] Seraji, H.: Direct Adaptive Control of Manipu-  
lators in Cartesian Space.  
J. of Robotic Systems,  
Vol. 4, S. 157- 178, 1987.
- [56] Silver, W. M.: On the Equivalence of Lagrangian  
and Newton-Euler Dynamics for  
Manipulators.  
International J. of Robotics Re-  
search,  
Vol. 1, No. 2, S. 60-70, 1983.
- [57] Slotine, J. J. E.: The Robust Control of Robot Manipu-  
lators.  
International J. of Robotics Re-  
search,  
Vol. 4, No. 2, S. 49-64, 1985.
- [58] Slotine, J. J. E.;  
Sastry, S. S.: Tracking Control of Nonlinear  
Systems Using Sliding Surfaces with  
Application to Robot Manipulators.  
International J. of Control,  
Vol. 38, S. 465-492, 1983.

- [59] Slotine, J. J. E.; Spong, M. W.: Robust Robot Control with Bounded Input Torques.  
J. of Robotic Systems,  
Vol. 2, S. 329-352, 1985.
- [60] Sommer, R.: Entwurf nichtlinearer, zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. Regelungstechnik,  
Bd. 27, Heft 12, S. 393-399, 1979.
- [61] Sommer, R.: Zusammenhang zwischen dem Entkopplungs- und dem Polvorgabeverfahren für nichtlineare zeitinvariante Mehrgrößensysteme. Regelungstechnik,  
Bd. 28, Heft 7, S. 232-236, 1980.
- [62] Spong, M. W.; Thorp, J. S.; Kleinwaks, J. M.: The Control of Robot Manipulators with Bounded Input.  
IEEE Transactions on Automatic Control,  
Vol. AC-31, No. 6, S. 483-490, 1986.
- [63] Spong, M. W.; Thorp, J. S.; Kleinwaks, J. M.: Robust Microprocessor Control of Robot Manipulators.  
Automatica,  
Vol. 23, No. 3, S. 373-379, 1987.
- [64] Spong, M. W.; Vidyasagar, M.: Robust Linear Compensator Design for Nonlinear Robotic Control.  
IEEE J. of Robotics and Automation,  
Vol. RA-3, No. 4, S. 345-351, 1987.
- [65] Spring, K. W.: Euler Parameters and the Use of Quaternion Algebra in the Manipulation of Finite Rotations: a Review.  
Mechanism and Machine Theory,  
Vol. 21, No. 5, S. 365-373, 1986.

- [66] Suh, C. H.;                      Kinematics and Mechanism Design.  
Radcliffe, C. W.:                  John Wiley & Sons, New York, 1978  
   (S. 89-94).
  
- [67] Volmer, J.:                      Industrieroboter.  
   VEB Verlag Technik, Berlin, 1981.
  
- [68] Vukobratovic, M.;                Dynamics of Manipulation Robots.  
Potkonjak, V.:                      Springer-Verlag, Berlin. 1982.
  
- [69] Vukobratovic, M.;                Real-Time Dynamics of Manipulation  
Kircanski, N.:                      Robots.  
   Springer-Verlag. Berlin. 1985.
  
- [70] van der Waerden,                Hamiltons Entdeckung der Quater-  
B. L.:                                nionen.  
   Vandenhoeck und Ruprecht, Götting-  
   en, 1973.
  
- [71] Waldron, K. J.;                  A Study of the Jacobian Matrix of  
Wang, S. L.;                        Serial Manipulators.  
Bolin, S. J.:                        Transactions ASME: J. of Mecha-  
   nisms, Transmissions, and Automa-  
   tion in Design,  
   Vol. 107, S. 230-239, 1985.
  
- [72] Walker, M. W.;                  Efficient Dynamic Computer Simula-  
Orin, D. E.:                        tion of Robotic Mechanisms.  
   Transactions ASME: J. of Dynamic  
   Systems, Measurement, and Control,  
   Vol. 104, S. 205-211, 1982.
  
- [73] Wampler, C. W.:                Manipulator Inverse Kinematic  
   Solutions Based on Vector Formula-  
   tions and Damped Least-Squares  
   Method.  
   IEEE Transactions on Systems, Man,  
   and Cybernetics,  
   Vol. SMC-16, No. 1, S. 93-101,  
   1986.



- [74] Wehage, R. A.: Quaternions and Euler Parameters — a Brief Exposition. Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics; E. J. Haug (Ed.). Springer-Verlag, New York, 1984, S. 147-180.
- [75] Whitney, D. E.: Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Prostheses. IEEE Transactions on Man-Machine Systems, Vol. MMS-10, No. 2, S. 47-53, 1969.
- [76] Woernle, C.: Ein systematisches Verfahren für die Rückwärtstransformation bei Industrierobotern. Robotersysteme, Bd. 3, Heft 4, S. 219-228, 1987.
- [77] Yang, D. C. H.;  
Lee, T. W.: Heuristic Combinational Optimization in the Design of Manipulator Workspace. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Vol. SMC-14, No. 4, S. 571-580, 1984.

## ANHANG

### ALGEBRA DER EULERSCHEN PARAMETER

Die detaillierte Herleitung der Algebra der Eulerschen Parameter wurde schon in [36] dargelegt. Über die Ergebnisse wird hier berichtet.

#### A.1 Quaternionen

Am 16. Oktober 1843 entdeckte William Rowan Hamilton die Quaternionen [70]:

$$\hat{a} = a_0 + a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}.$$

Er verlangte die Multiplikation der Quaternionen wie

$$\hat{a} \odot \hat{b} = \hat{c}$$

gemäß folgender Regeln:

erstens, daß man gliedweise ausmultiplizieren kann,

zweitens, daß die Länge der Produktquaternion gleich dem Produkt der Längen sein soll, d.h. das Gesetz der Moduli gilt:

$$\begin{aligned} & (a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) (b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &= c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Die Multiplikationsregeln lauten nämlich

$$\begin{aligned} \vec{i} \odot \vec{i} &= \vec{j} \odot \vec{j} = \vec{k} \odot \vec{k} = -1, \\ \vec{i} \odot \vec{j} &= \vec{k}, \quad \vec{j} \odot \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \odot \vec{i} = \vec{j}, \\ \vec{j} \odot \vec{i} &= -\vec{k}, \quad \vec{k} \odot \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \odot \vec{k} = -\vec{j}. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Um die Quaternionen leicht zu manipulieren, wird hier das Konzept einer Basis eingeführt. Da die Quaternionen einen vierdimensionalen Vektorraum bilden, wird folgendermaßen eine Basis definiert:

$$E_0 \triangleq [1 \quad \vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}].$$

Die Quaternionen lassen sich dann mit dieser Basis wie folgt darstellen:

$$\hat{a} = E_0 \underline{a}^{<0>}, \quad (A.3)$$

wobei gilt:

$$\underline{a}^{<0>} = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T,$$

welche die auf  $E_0$  bezogene Darstellung von  $\hat{a}$  genannt wird. Nun können die Definitionen der Addition und Multiplikation von zwei Quaternionen ganz einfach umformuliert werden:

$$\underline{a}^{<0>} + \underline{b}^{<0>} = \begin{bmatrix} a_0 + b_0 \\ a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}, \quad (A.4)$$

$$\underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} = \underline{P}(\underline{a}^{<0>}) \underline{b}^{<0>}, \quad (A.5)$$

wobei gilt:

$$\underline{P}(\underline{a}^{<0>}) = \begin{bmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Ein dreidimensionaler Vektor und ein Skalar können auch als eine Vektorquaternion bzw. eine Skalarquaternion angesehen

werden:

$$\underline{a}^{<0>} = [0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T,$$

$$a_0 = [a_0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Im gesamten Text bedeutet die Untertilde eine Quaternion, das Unterstreichen eine Vektorquaternion. Ein Skalar hat kein Unterzeichen. Die zur Quaternion  $\underline{a}^{<0>}$  Konjugierte ist so definiert,

$$\underline{a}^{*<0>} \triangleq [a_0 \quad -a_1 \quad -a_2 \quad -a_3]^T,$$

daß die Quaternionenprodukt einer Quaternion und ihrer Konjugierten ein Skalar ist.

Einige wichtige Manipulationsregeln der Quaternionen sind in der folgenden Liste aufgereiht:

$$\text{Addition: } \underline{a}^{<0>} + \underline{b}^{<0>} = \underline{b}^{<0>} + \underline{a}^{<0>},$$

$$\begin{aligned} \underline{a}^{<0>} + \underline{b}^{<0>} + \underline{c}^{<0>} &= (\underline{a}^{<0>} + \underline{b}^{<0>}) + \underline{c}^{<0>} \\ &= \underline{a}^{<0>} + (\underline{b}^{<0>} + \underline{c}^{<0>}); \end{aligned}$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned} \underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} \odot \underline{c}^{<0>} &= \underline{a}^{<0>} \odot (\underline{b}^{<0>} \odot \underline{c}^{<0>}) \\ &= (\underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>}) \odot \underline{c}^{<0>}, \end{aligned}$$

$$\underline{a}^{<0>} \odot (\underline{b}^{<0>} + \underline{c}^{<0>}) = \underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} + \underline{a}^{<0>} \odot \underline{c}^{<0>},$$

$$\text{aber: } \underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} \neq \underline{b}^{<0>} \odot \underline{a}^{<0>};$$

Skalar ( $\alpha, \beta$  sind Skalar):

$$\alpha \odot \underline{a}^{<0>} = \alpha \underline{a}^{<0>} = \underline{a}^{<0>} \alpha = \underline{a}^{<0>} \odot \alpha,$$

$$\alpha \odot (\underline{a}^{<0>} + \underline{b}^{<0>}) = \alpha \underline{a}^{<0>} + \alpha \underline{b}^{<0>},$$

$$(\alpha + \beta) \underline{a}^{<0>} = \alpha \underline{a}^{<0>} + \beta \underline{a}^{<0>};$$

$$\text{Konjugation: } \underline{a}^{<0>} \odot \underline{a}^{*<0>} = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2,$$

$$(\underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>})^* = \underline{b}^{*<0>} \odot \underline{a}^{*<0>},$$

$$(\underline{a}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} \odot \underline{c}^{<0>})^* = \underline{c}^{*<0>} \odot \underline{b}^{*<0>} \odot \underline{a}^{*<0>};$$

$$\text{Matrix: } \underline{P}(\underline{a}^{*<0>}) = \underline{P}^T(\underline{a}^{<0>}),$$

$$\underline{P}^{-1}(\underline{a}^{<0>}) = \frac{\underline{P}^T(\underline{a}^{<0>})}{(\underline{a} \odot \underline{a}^*)}.$$

## A.2 Eulersche Parameter

Die Eulerschen Parameter,

$$\hat{e} = \cos \theta + \sin \theta \vec{u} \quad \text{oder}$$

$$\underline{e}^{<0>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \underline{u}^{<0>} \end{bmatrix},$$

die eine Drehung von  $\theta$  um  $\vec{u}$  darstellen können, sind eine normierte Quaternion, d.h. es gilt:

$$\underline{e}^{<0>} \odot \underline{e}^{*<0>} = 1. \quad (\text{A.6})$$

Die Beziehung einer Quaternion vor und nach einer Drehung kann mit den Eulerschen Parametern so beschrieben werden (s. Bild A-1):

$$\underline{c}^{<0>} = \underline{e}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} \odot \underline{e}^{*<0>}, \quad (\text{A.7})$$

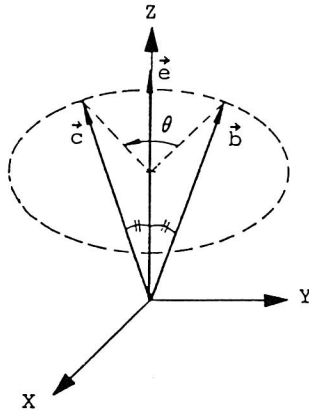


Bild A-1. Physikalische Bedeutung der Eulerschen Parameter

wobei gilt:

$$c_0 = b_0;$$

damit gilt auch:

$$\underline{c}^{<0>} = \underline{e}^{<0>} \odot \underline{b}^{<0>} \odot \underline{e}^{* <0>}. \quad (\text{A.8})$$

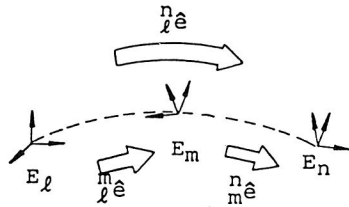
Entsprechen  $\hat{n}_m^e$ ,  $\hat{m}_l^e$  der Drehung von  $\vec{n}_m$  um  $\vec{n}_m$  bzw. der von  $\vec{m}_l$  um  $\vec{m}_l$ , ist nun leicht zu beweisen, daß gilt:

$$\vec{n}_l^e^{<0>} = \vec{n}_m^e^{<0>} \odot \vec{m}_l^e^{<0>}. \quad (\text{A.9})$$

Diese Regel heißt Vorprodukt.

Stimmt eine Basis  $E_m$  nach einer Drehung von  $\vec{n}_m$  um  $\vec{n}_m$  mit einer anderen Basis  $E_n$  überein, dann folgt gemäß der Gl.(A.8):

$$\begin{aligned} E_n &= E_m [1 \quad n_i^{<m>} \quad n_j^{<m>} \quad n_k^{<m>}] \\ &= E_m (\vec{n}_m^e^{<m>} \odot [1 \quad m_i^{<m>} \quad m_j^{<m>} \quad m_k^{<m>}] \odot \vec{n}_m^{* <m>}), \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$



$$\text{Nachprodukt: } \underline{m_l e}^{<l>} \odot \underline{n_m e}^{<m>} = \underline{n_l e}^{<l>}$$

$$\text{Vorprodukt: } \underline{n_m e}^{<m>} \odot \underline{m_l e}^{<l>} = \underline{n_l e}^{<m>}$$

$$\text{Bemerkung: } \underline{m_l e}^{<l>} = \underline{m_l e}^{<m>}$$

Bild A-2. Quaternionenprodukte

wobei die Matrix in der eckigen Klammer der letzten Gleichung offensichtlich eine 4x4 Einheitsmatrix ist.

Aus der Gl.(A.10) und

$$\hat{a} = E_m \underline{a}^{<m>} = E_n \underline{a}^{<n>} \quad (\text{A.11})$$

ergibt sich:

$$\underline{a}^{<m>} = \underline{n_m e}^{<m>} \odot \underline{a}^{<n>} \odot \underline{n_m e}^{* <m>}. \quad (\text{A.12})$$

Durch Ersetzen von  $\hat{a}$  mit  $\underline{n_l e}^{\hat{}}$  folgt:

$$\underline{n_l e}^{<m>} = \underline{n_m e}^{<n>}, \quad (\text{A.13})$$

auf Grund von  $\underline{e} \odot \underline{e}^* = 1$ . Dieses Ergebnis kann auch aus der Tatsache  $\underline{n_u}^{<m>} = \underline{n_u}^{<n>}$  erhalten werden. Anschließend ist

$$\underline{n_l e}^{<l>} = \underline{m_l e}^{<l>} \odot \underline{n_m e}^{<m>} \quad (\text{A.14})$$

einfach mit Gl.(A.12) zu beweisen. Diese Regel wird Nachprodukt genannt (s. Bild A-2), das nur für die auf die jeweiligen lokalen Basen bezogenen Darstellungen gilt. Im

Gegensatz dazu wird das Vorprodukt der Gl.(A.9) in dem Fall angewendet, daß alle Quaternionen in bezug auf dieselbe Basis dargestellt sind.

### A.3 Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Es wird angenommen, daß  $E_m$  und  $E_n$  zwei sich drehende Basen seien (Bild A-3). Die relative Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung von  $E_n$  in bezug auf  $E_m$  lassen sich mit  ${}^n_m\omega$  und  ${}^n_m\alpha$  kennzeichnen. Es ist bereits bekannt [7, 18], daß die relative zeitliche Änderung eines Vektors  $\vec{r}$  in bezug auf  $E_m$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = E_m \frac{d\vec{r}^{<m>}}{dt} = E_n \left( \frac{d\vec{r}^{<n>}}{dt} + {}^n_m\omega^{<n>} \times \vec{r}^{<n>} \right) \quad (A.15)$$

ist. Nach Differenzierung von Gl.(A.12) erhält man:

$$\begin{aligned} E_m \frac{d\vec{r}^{<m>}}{dt} &= E_n \left( {}^n_m\dot{e}^{<m>} \odot \frac{d({}^n_m\dot{e}^{<m>} \odot \vec{r}^{<n>} \odot {}^n_m\dot{e}^{*<m>})}{dt} \odot {}^n_m\dot{e}^{*<m>} \right) \\ &= E_n \left( \frac{d\vec{r}^{<n>}}{dt} - 2\vec{r}^{<n>} \times ({}^n_m\dot{e}^{*<m>} \odot {}^n_m\dot{e}^{<m>}) \right), \end{aligned} \quad (A.16)$$

wobei  ${}^n_m\dot{e}^{<m>} = d({}^n_m\dot{e}^{<m>})/dt$  und  $d({}^n_m\dot{e}^{<m>})/dt \neq (d\hat{{}^n_m\dot{e}}/dt)^{<m>}$ .

Es sei darauf hingewiesen, daß

$${}^n_m\dot{e}^{*<m>} = {}^m_n\dot{e}^{<m>} = {}^m_n\dot{e}^{<n>}, \quad (A.17)$$

$${}^n_m\dot{e}^{<m>} = {}^n_m\dot{e}^{<n>}, \quad (A.18)$$

$${}^n_m\dot{e}^{<m>} \odot {}^n_m\dot{e}^{*<m>} + {}^m_n\dot{e}^{<m>} \odot {}^m_n\dot{e}^{*<m>} = 0. \quad (A.19)$$

Beim Vergleich der Gln.(A.15) und (A.16) erhält man die Beziehung zwischen der relativen Winkelgeschwindigkeit und den Eulerschen Parametern. Durch Verwendung der Gln.(A.17)



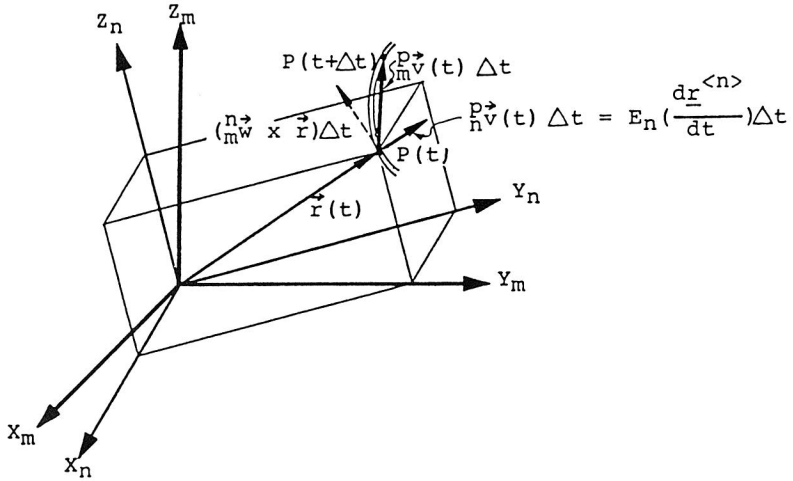


Bild A-3. Beziehung zwischen einer Bahn und einer sich drehenden Koordinatenbasis

bis (A.19) wird diese Beziehung wie folgt zusammengesetzt:

$$\underline{n_m \omega}^{<n>} = 2 \underline{n_m \dot{e}}^{* <n>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<n>} = -2 \underline{n_m \dot{e}}^{* <n>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<n>}, \quad (\text{A.20})$$

$$\underline{n_m \omega}^{<m>} = 2 \underline{n_m \dot{e}}^{* <m>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<m>} = -2 \underline{n_m \dot{e}}^{* <m>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<m>}. \quad (\text{A.21})$$

Durch Differenzierung beider Gleichungen folgen dann:

$$\begin{aligned} \underline{n_m \alpha}^{<n>} &= 2 (\underline{n_m \ddot{e}}^{* <n>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<n>} + \underline{n_m \dot{e}}^{* <n>} \odot \underline{n_m \ddot{e}}^{<n>}) \\ &= -2 (\underline{n_m \ddot{e}}^{* <n>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<n>} + \underline{n_m \dot{e}}^{* <n>} \odot \underline{n_m \ddot{e}}^{<n>}), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{aligned} \underline{n_m \alpha}^{<m>} &= 2 (\underline{n_m \ddot{e}}^{* <m>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<m>} + \underline{n_m \dot{e}}^{* <m>} \odot \underline{n_m \ddot{e}}^{<m>}) \\ &= -2 (\underline{n_m \ddot{e}}^{* <m>} \odot \underline{n_m \dot{e}}^{<m>} + \underline{n_m \dot{e}}^{* <m>} \odot \underline{n_m \ddot{e}}^{<m>}). \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Hier ist das Produkt von  $\underline{\dot{e}} \odot \underline{\dot{e}}^*$  ein Skalar. Es läßt sich

leicht

$$\underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<m>} = \left[ \frac{1}{4} (\underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>} \cdot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>}) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (\text{A.24})$$

herleiten. Andererseits werden die Gln.(A.20) bis (A.23) wie folgt umformuliert:

$$\underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>} = \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<n>} = \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<n>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<n>} = \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>}, \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<m>} = \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<n>} = - \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<n>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<n>} = - \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<m>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>}; \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>} &= \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<n>} \\ &= \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<n>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\alpha}}^{<n>} - \frac{1}{4} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<n>} (\underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<n>} \cdot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<n>}) \\ &= \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{\alpha}}^{<m>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>} - \frac{1}{4} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>} (\underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>} \cdot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>}), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$\begin{aligned} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<m>} &= \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<n>} \\ &= - \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{\alpha}}^{<n>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<n>} - \frac{1}{4} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<n>} (\underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<n>} \cdot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<n>}) \\ &= - \frac{1}{2} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{*<m>} \odot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\alpha}}^{<m>} - \frac{1}{4} \underline{n}_{\underline{m}\underline{e}}^{<m>} (\underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>} \cdot \underline{n}_{\underline{m}\underline{\omega}}^{<m>}). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

#### A.4 Anwendung auf Roboter

Die vier Schritte der Koordinatentransformation zwischen zwei benachbarten körperfesten Koordinatenbasen im normalen Eingangsachsen-Koordinatensystem (s. Abschnitt 2.2.2 und

Bild 2-5) entsprechen den folgenden Eulerschen Parametern:

$$1. [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$2. \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta_i}{2} & \sin \frac{\beta_i}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$3. [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$4. \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_i}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix}^T.$$

Gemäß dem Nachprodukt der Gl.(A.14) erhält man:

$${}_{i-1}\mathbf{e}^{<i-1>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \\ \sin \frac{\beta_i}{2} & \cos \frac{\theta_i}{2} \\ -\sin \frac{\beta_i}{2} & \sin \frac{\theta_i}{2} \\ \cos \frac{\beta_i}{2} & \sin \frac{\theta_i}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Analog dazu folgen dann:

$${}_{i-1}\mathbf{e}^{<i-1>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\delta_{ij}}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\delta_{ij}}{2} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.30})$$

$${}_{i-1}\mathbf{e}^{<i-1>} = {}_{i-1}\mathbf{e}^{<i-1>} \circ {}_{j-1}\mathbf{e}^{<j-1>}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta_j}{2} & \cos \frac{\delta_{ij} + \theta_j}{2} \\ \sin \frac{\beta_j}{2} & \cos \frac{\delta_{ij} + \theta_j}{2} \\ -\sin \frac{\beta_j}{2} & \sin \frac{\delta_{ij} + \theta_j}{2} \\ \cos \frac{\beta_j}{2} & \sin \frac{\delta_{ij} + \theta_j}{2} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

### Beispiel: Stanford-Arm

Das normale Eingangachsen-Koordinatensystem des Stanford Arms ist in Bild 2-6 dargestellt. Die Eulerschen Parameter der jeweiligen Gliedern sind:

$${}^1_0\mathbf{e}^{<0>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_1}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\theta_1}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$${}^2_1\mathbf{e}^{<1>} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_2}{2} & \cos \frac{\theta_2}{2} & -\sin \frac{\theta_2}{2} & \sin \frac{\theta_2}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$${}^3_2\mathbf{e}^{<2>} = \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$${}^4_3\mathbf{e}^{<3>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_4}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{\theta_4}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$${}^5_4\mathbf{e}^{<4>} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_5}{2} & \cos \frac{\theta_5}{2} & -\sin \frac{\theta_5}{2} & \sin \frac{\theta_5}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$${}^6_5\mathbf{e}^{<5>} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta_6}{2} & \cos \frac{\theta_6}{2} & -\sin \frac{\theta_6}{2} & \sin \frac{\theta_6}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{E}_{6e}^{<6>} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T.$$

Anschließend wird mit Gl.(A.14)

$$\begin{aligned} \underline{E}_{oe}^{<o>} &= \underline{1}_{oe}^{<o>} \circ \underline{1}_{1e}^{<1>} \dots \circ \underline{6}_{5e}^{<5>} \circ \underline{E}_{6e}^{<6>} \\ &= \begin{bmatrix} -C_4 C_{2-5} C_{1+6} - S_4 C_{2+5} S_{1+6} \\ -C_4 S_{2-5} S_{1-6} - S_4 S_{2+5} C_{1-6} \\ C_4 S_{2-5} C_{1-6} - S_4 S_{2+5} S_{1-6} \\ -C_4 C_{2-5} S_{1-6} + S_4 C_{2+5} C_{1+6} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A.32)$$

erhalten, wobei gilt:  $C_i \triangleq \cos(\theta_i/2)$ ,  $S_i \triangleq \sin(\theta_i/2)$ ,  $C_{i\pm j} \triangleq \cos((\theta_i \pm \theta_j)/2)$ ,  $S_{i\pm j} \triangleq \sin((\theta_i \pm \theta_j)/2)$ .

Geht man vom einfachen Eingangsachsen-Koordinatensystem aus (s. Bild 2-7), erhält man andererseits:

$$\underline{1}_{oe}^{<o>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{q_1}{2} & 0 & 0 & \sin \frac{q_1}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{2}_{1e}^{<1>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{q_2}{2} & 0 & -\sin \frac{q_2}{2} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{3}_{2e}^{<2>} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\underline{4}_{3e}^{<3>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{q_4}{2} & \sin \frac{q_4}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{5}_{4e}^{<4>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{q_5}{2} & 0 & \sin \frac{q_5}{2} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{6}_{5e}^{<5>} = \begin{bmatrix} \cos \frac{q_6}{2} & 0 & 0 & -\sin \frac{q_6}{2} \end{bmatrix}^T,$$

$$\underline{E}_{6e}^{<6>} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T;$$

und

$$E_{oe}^{<o>} = \begin{bmatrix} C'_4 & S'_{2-5} & C'_{1+6} & - & S'_4 & C'_{2+5} & S'_{1+6} \\ -C'_4 & C'_{2-5} & S'_{1-6} & - & S'_4 & S'_{2+5} & C'_{1-6} \\ C'_4 & C'_{2-5} & C'_{1-6} & - & S'_4 & S'_{2+5} & S'_{1-6} \\ C'_4 & S'_{2-5} & S'_{1-6} & + & S'_4 & C'_{2+5} & C'_{1+6} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

wobei gilt:  $C'_i \triangleq \cos(q_i/2)$ ,  $S'_i \triangleq \sin(q_i/2)$ ,  $C'_{i\pm j} \triangleq \cos((q_i \pm q_j)/2)$ ,  $S'_{i\pm j} \triangleq \sin((q_i \pm q_j)/2)$ .

Tatsächlich sind beide Gln.(A.32) und (A.33) äquivalent.

## LEBENS LAUF

Name:	Shir-Kuan Lin
Geboren:	am 25. Sept. 1956 in Taipeh, Taiwan, R.O.C.
Eltern:	Jihn-Larn Lin, A-Su geb. Wu
Familienstand:	Verheiratet mit Wen-Jen geb. Chen
1963 - 1969	Besuch der Volksschule in Taipeh
1969 - 1972	Besuch der Mittelschule in Taipeh
1972 - 1975	Besuch der Oberschule in Taipeh
1975 - 1979	Studium an der Unterabteilung für Flugzeug- technik der Maschinenbauabteilung der Universität Cheng-Kung in Tainan, Taiwan
Juni 1979	Abschluß mit dem Grad: "Bachelor of Science"
1979 - 1981	Mechanikkonstrukteur am "Aeronautical Research Laboratory, Aero-industry Developing Center, Taiwan" während des Militärdienstes
1981 - 1983	Studium am Institut für Kraftmaschinenbau der Universität Tsing-Hua in Hsinchu, Taiwan
Juni 1983	Abschluß mit dem Grad: "Master of Science"
1983 - 1984	Dozent an der Maschinenbauabteilung des Nationalen Taiwan-Instituts für Technologie
Apr.-Sept. 1984	deutsche Sprachkurse am Goethe Institut Freiburg
Seit Okt. 1984	DAAD Stipendiat am Lehrstuhl für Ferti- gungsautomatisierung und Produktions- systematik der Universität Erlangen- Nürnberg

# Reihe

# Fertigungstechnik

# Erlangen

**Innovationspotentiale in der rechnerintegrierten Produktion durch wissensbasierte Systeme**

Andreas Hemberger. 208 Seiten, 107 Bilder. 1988. Kartoniert.

**Beitrag zur Steigerung der Flexibilität automatisierter Montagesysteme durch Sensorintegration und erweiterte Steuerungskonzepte**

Detlef Classe. 194 Seiten, 70 Bilder. 1988. Kartoniert.

**Projektierung von Montagesystemen**

Friedrich-Wilhelm Nolting. 201 Seiten, 107 Bilder, 1 Tabelle. 1989. Kartoniert.

**Nutzungsgradsteigerung von Montagesystemen durch den Einsatz der Simulationstechnik**

Karsten Schlüter. 177 Seiten, 97 Bilder. 1989. Kartoniert.

**Aufbau von Modellen zur Lageregelung von Industrierobotern**

Shir-Kuan Lin. 168 Seiten, 46 Bilder. 1989. Kartoniert.